

## ZADANIA Z MAKROEKONOMII III(II)

UŁOŻONE NA POTRZEBY KURSÓW PROWADZONYCH W SEMESTRACH  
ZIMOWYCH 2002/2003, 2004/2005 I 2005/2006

GRZEGORZ KLIMA

### Zadanie

Rozpatrz model Ramseya z podatkami od konsumpcji ( $\tau_c$ ) i dochodów z aktywów ( $\tau_a$ ). W gospodarce jest wielu identycznych konsumentów i przedsiębiorstw spotykających się na doskonale konkurencyjnych rynkach. Problem konsumenta jest następujący:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{pw.} \quad k_{t+1} = (1 + (1 - \tau_k)r_t)k_t + w_t - (1 + \tau_c)c_t.$$

Firmy dysponują technologią o stałych korzyściach skali  $F(K, L)$  i maksymalizują zysk:

$$\max \Pi_t = F(K, L) - r_t K - w_t L - \delta K.$$

1. Znajdź warunki pierwszego rzędu dla konsumentów i firm.
2. Określ równowagę i znajdź równanie ewolucji kapitału w tej gospodarce.
3. Znajdź warunek określający stan ustalony i korzystając z tw. o funkcji uwikłanej określ jak oba podatki wpływają na kapitał i konsumpcję w stanie ustalonym.

### Zadanie

Rozpatrz następujący model optymalnej konsumpcji majątku w czasie w obecności tzw. formowania się przyzwyczajęń (ang. *habit formation*) Problem konsumenta jest następujący

$$\max \int_0^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) dt \quad \text{pw.} \quad \dot{h} = \alpha(c_t - h_t), \quad \dot{a} = ra_t - c_t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} a_t \geq 0,$$

przy czym  $a(0) > 0$ ,  $h(0)$  dane,  $\alpha > 0$ ,  $u_1 > 0$ ,  $u_2 < 0$  (im wyższy jest poziom konsumpcji, do którego przywykliśmy, tym mniej cenimy ten sam poziom konsumpcji dzisiejszej).

1. Zapisz Hamiltonian wartości bieżącej oraz warunki transwersalności dla tego problemu. **Wskazówka:** ile w powyższym problemie jest zmiennych sterujących a ile zmiennych stanu? Pamiętaj, że na każdą zmienną stanu przypada jeden mnożnik Lagrange'a.

2. Znajdź warunki pierwszego rzędu optymalności sterowania.
3. Znajdź  $c(t)$  przyjmując  $\beta = r$  i  $u_2 = 0$  (przyzwyczajenia nie odgrywają roli).

### Zadanie

Rozpatrz problem konsumenta czerpiącego użyteczność z konsumpcji bieżącej  $c_t$  i zasobu dóbr konsumpcyjnych trwałego użytku  $d_t$ . Zagadnienie konsumenta jest następujące:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, d_t)$$

pod warunkami:

$$a_{t+1} = (1 + r)(a_t + y_t - x_t - c_t),$$

$$d_{t+1} = (1 - \delta)d_t + x_t,$$

gdzie  $a$  aktywa,  $y$  stochastyczny dochód,  $x$  zakupy dóbr trwałego użytku,  $\delta$  stopa deprecjacji dóbr trwałego użytku.

1. Zapisz równanie Bellmana.
2. Określ warunki pierwszego rzędu.
3. Przyjmij  $\beta(1 + r) = 1$  oraz:

$$u(c, k) = -(\bar{c} - c)^2 - (\bar{k} - k)^2 + \alpha ck.$$

Przepisz warunki pierwszego rzędu przy tych upraszczających założeniach.

4. Przyjmij  $\alpha = 0$ . Jak ewoluje  $c$ ,  $x$  i  $k$  (co jest błędzeniem losowym, co białym szumem)?

### Zadanie

Rozpatrz model rynku rolnego, na którym cena zboża i plony są nieznane w momencie zasiewu. Rolnicy zasiewają  $a$  hektarów na podstawie swojego oczekiwania ceny  $p$  wg wzoru:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[p].$$

Plon  $q$  dany jest wzorem:

$$q = ay,$$

gdzie  $y$  jest zmienną losową o rozkładzie  $N(1; 0,1)$ . Popyt na zboże dany jest wzorem:

$$q = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}p.$$

1. Znajdź równowagę racjonalnych oczekiwań na tym rynku, tj. określ  $E[p]$ , zasiew, wartość oczekiwaną i wariancję plonów oraz wariancję cen.
2. Przyjmij teraz, że rząd gwarantuje rolnikom cenę minimalną 1, tj. gdy cena rynkowa spada poniżej, rząd wypłaca im  $1 - p$ . Zapisz równanie określające nową równowagę racjonalnych oczekiwań (czyli określające  $E[p]$ ). Jak zmieni się cena rynkowa i zasiewy w równowadze? Wytłumacz intuicyjnie i uzasadnij formalnie swoją odpowiedź.

### Zadanie

Na konkurencyjnym rynku spotyka się dwóch konsumentów żyjących 2 okresy maksymalizujących oczekiwany zdyskontowany strumień użyteczności:

$$E_0[u(c_0^i) + \beta u(c_1^i)].$$

Dochód obu konsumentów w pierwszym okresie jest deterministyczny i wynosi  $y_0^i$ . W drugim okresie dla każdego z konsumentów losowane są niezależnie dwa stany świata: „dobry” i „zły”. Pradopodobieństwo dobrego dla  $i$ -tego konsumenta stanu świata wynosi  $P^i$ .  $i$ -ty konsument uzyskuje w dobrym i złym stanie świata dochody  $y_1^i(G^i)$  i  $y_1^i(B^i)$ .

1. Zapisz ograniczenia budżetowe konsumentów. Użyj litery  $q$  na oznaczenie cen. Napisz lagranżan dla problemu każdego z nich. **Wskazówka:** ile jest stanów świata w pierwszym i w drugim okresie?
2. Określ równowagę Arrowa-Debreu w tej gospodarce.
3. Znajdź równowagę dla  $u(c) = \ln c$ ,  $y_0^1 = 1$ ,  $y_0^2 = 2$ ,  $P^1 = P^2 = \frac{1}{2}$ ,  $y_1^1(G^1) = 2$ ,  $y_1^1(B^1) = 1$ ,  $y_1^2(G^2) = 1$ ,  $y_1^2(B^2) = 0$ .
4. Niech ( $s_1$  oznacza stan świata):

$$M^i(s_1) \equiv \frac{\beta u'(c_1^i)}{u'(c_0^i)},$$

$$R(s_1) \equiv \frac{q_0 \text{Prob}(s_1)}{q_1(s_1)}.$$

Pokaż, że dla każdego z konsumentów zachodzi:

$$E[M^i R] = 1. \tag{1}$$

5. Pokaż, że  $M^1 = M^2$ .  $M$  zwykle się nazywa stochastycznym czynnikiem dyskontującym.

6. Przeformułuj problem  $i$ -tego konsumenta następująco: niech  $S^i = y_0 - c_0$  oznacza (może ujemne) oszczędności  $i$ -tego konsumenta; niech  $p_0$  oznacza cenę konsumpcji w okresie pierwszym, zaś  $p_1(s_1)$  oznacza cenę konsumpcji w okresie drugim *jeśli wystąpił stan świata*  $s_1$ ; zmienną sterującą jest konsumpcja w chwili 0, w chwili 1 oszczędności plus dochód z okresu 1 są konsumowane. Oszczędności *jeśli wystąpił stan świata*  $s_1$  są warte (w jednostkach konsumpcji okresu 1):

$$S^i \frac{p_0}{p_1(s_1)}.$$

Problem konsumenta jest więc następujący:

$$\max_{c_0^i} u(c_0^i) + \beta E_0 u \left( (y_0^i - c_0^i) \frac{p_0}{p_1(s_1)} + y_1^i(s_1) \right).$$

Pokaż, że jeśli przyjąć:

$$R = \frac{p_0}{p_1(s_1)},$$

to równanie (1) wciąż jest w mocy.  $R$  jest po prostu równe 1 plus stopa zwrotu *jeśli wystąpił stan świata*  $s_1$ , mówi ile jednostek konsumpcji okresu 1 mogę kupić za jednostkę konsumpcji okresu 0. **Uwaga 1:**  $q$  i  $p$  mają się do siebie jak cena kuponu totolotka do ceny kuponu, na którym trafiono 6-kę.  $q$  jest ceną loterii a więc to wypłata  $p$  ważona prawdopodobieństwem. **Uwaga 2:** (1) to po prostu stochastyczne równanie... no właśnie czyje?

## Zadanie

Rozpatrz rynek na którym spotyka się wielu konsumentów rozwiązujących problem

$$\max E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

Konsumenti czerpią dochód z aktywów  $(x^i)_{i=1}^n$ . Międzyokresowe ograniczenie budżetowe inwestora-konsumenta ma postać:

$$c_t + p_t \cdot x_t = (p_t + d_t) \cdot x_{t-1},$$

gdzie  $\cdot$  oznacza iloczyn skalarny wektorów,  $p_t$  jest wektorem cen aktywów,  $d_t$  wektorem dywidend,  $x_t$  portfelem ( $x_t^i$  oznacza zasób aktywa  $i$  w momencie  $t$ ).

1. Napisz równanie Bellmana dla tego problemu. **Wskazówka:** zmienną stanu jest wektor  $x_{t-1}$ , zmienną sterującą wektor -  $x_t$  (decyzja portfelowa - jutrzejszy stan).

2. Pokaż, że warunek pierwszego rzędu ma postać:

$$p_t^i u'(c_t) = \beta E[u'(c_{t+1})(p_{t+1}^i + d_{t+1}^i) | \mathcal{F}_t].$$

3. Rozwiąż powyższe równanie „do przodu” ze względu na  $p_t^i$ .

### Zadanie

Rozpatrz problem centralnego planisty

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{pw} \quad c_t + i_t \leq f(k_t), \quad k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t.$$

w modelu Ramseya przy następujących założeniach:  $\delta = 1$ ,  $u(c) = \ln c$  i  $f(k) = k^\alpha$ . Równanie Bellmana dla tego zagadnienia ma postać:

$$V(k_t) = \max_{c_t} \{ \ln c_t + \beta V(k_t^\alpha - c_t) \}.$$

Po podstawieniu  $c = k_t^\alpha - k_{t+1}$  przyjmuje ono postać:

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{ \ln(k_t^\alpha - k_{t+1}) + \beta V(k_{t+1}) \}.$$

Jest to równanie funkcyjne na  $V(k)$ . Operator po prawej stronie równania Bellmana nazwijmy  $T$ . Wtedy nasze równanie funkcyjne ma postać  $V = T(V)$  (funkcja wartości jest więc punktem stałym operatora  $T$ ). Metoda kolejnych przybliżeń polega na wyjściu od pewnej funkcji  $V_0$ , policzeniu  $T(V_0)$  i przyjęciu tej funkcji jako następnego przybliżenia, itd. Schemat będzie miał więc następującą postać rekurencyjną:  $V_{i+1} = T(V_i)$ . (Nie zapomnijmy jednak, że działamy na funkcjach nie na liczbach!)

1. Zaczynamy od przybliżenia  $V_0(k_t) = 0$ . Pokaż, że (pamiętaj, że jutrzejszy kapitał nie może być ujemny):

$$V_1(k_t) = T(V_0)(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{ \ln(k_t^\alpha - k_{t+1}) \} = \alpha \ln k_t.$$

2. Pokaż, że:

$$\begin{aligned} V_2(k_t) &= T(V_1)(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{ \ln(k_t^\alpha - k_{t+1}) + \alpha \beta \ln k_{t+1} \} = \\ &= \alpha \beta \ln(\alpha \beta) - (1 + \alpha \beta) \ln(1 + \alpha \beta) + \alpha(1 + \alpha \beta) \ln k_t. \end{aligned}$$

3. Niech  $g_n$  oznacza rodzinę funkcji określonych wzorem

$$g_n = a_n + b_n \ln x.$$

Pokaż, że:

$$T(g_n)(x) = g_{n+1}(x),$$

przy czym  $a_n$  i  $b_n$  spełniają równania rekurencyjne:

$$a_{n+1} = a_n \beta + \beta b_n \ln(\beta b_n) - (1 + b_n \beta) \ln(1 + b_n \beta),$$

$$b_{n+1} = \alpha(1 + b_n \beta).$$

4. Pokaż, że ciągi  $a_n$  i  $b_n$  określone jak wyżej zbiegają i mają granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta \ln(\alpha\beta)}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}.$$

5. Pokaż, że optymalne sterowanie  $k_{t+1}(k_t)$  to

$$k_{t+1}(k_t) = \alpha\beta k_t^\alpha.$$

### Zadanie

Konsument żyjący w dwóch okresach maksymalizuje użyteczność z konsumpcji przy zadanych dochodach:

$$\max u(c_1) + \beta u(c_2) \quad \text{pw.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}.$$

Przyjmij funkcję użyteczności CRRA:

$$u_\gamma(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} & \text{dla } \gamma > 0 \wedge \gamma \neq 1, \\ \ln c & \text{dla } \gamma = 1. \end{cases}$$

1. Kiedy wzrost stopy procentowej poprawi, a kiedy pogorszy (w sensie maksymalnej osiągalnej użyteczności) sytuację konsumenta? Zrób rysunek.
2. Przyjmij  $y_2 = 0$ . Dla jakich  $\gamma$  przy wzroście  $r$  efekt substytucyjny przeważy nad majątkowym? Kiedy się zniosą?

## Zadanie

Rozpatrz rozszerzenie modelu Ramseya wprowadzające pieniądź (jego realne zasoby) do funkcji użyteczności. Problem reprezentatywnego gospodarstwa domowego jest następujący:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(c, m) dt.$$

Ograniczenie międzyokresowe ma postać:

$$c + \dot{k} + \frac{\dot{M}}{P} = w + rk + X,$$

gdzie  $c$  - konsumpcja,  $k$  - kapitał w posiadaniu gosp. dom.,  $M$  nominalny zasób pieniądza,  $P$  poziom cen,  $w$ ,  $r$  wynagrodzenia czynników produkcji zaś  $X$  oznacza transfer od państwa. Firmy działają w środowisku konkurencyjnym i maksymalizują zysk (w kategoriach realnych):

$$\max \text{Revenue}_t = F(K, L) - r_t K - w_t L - \delta K.$$

1. Przyjmij  $a \equiv k + m$  ( $m \equiv \frac{M}{P}$ ). Znajdź równanie ewolucji  $a$ . Przyjmij oznaczenie  $\pi = \hat{P}$ .
2. Zapisz Hamiltonian wartości bieżącej w tym problemie i warunek transwersalności.
3. Znajdź warunki pierwszego rzędu. Z wewnątrzokresowego warunku pierwszego rzędu określ cenę pieniądza w jednostkach konsumpcji.
4. Znajdź warunki pierwszego rzędu firm i określ równowagę przyjmując, iż rządowe transfery są równe senioratowi, a więc:

$$X = \frac{\dot{M}}{P} = \sigma m,$$

gdzie  $\sigma$  oznacza tempo przyrostu podaży pieniądza.

5. Określ kapitał, konsumpcję, realne zasoby pieniądza w posiadaniu gosp. dom. i inflację w stanie ustalonym
6. Znajdź pochodną  $m$  po  $\sigma$  w stanie ustalonym. Jaki ma znak? Wytłumacz intuicyjnie uzyskany wynik.
7. Powiedz ile jednostek konsumpcji trzeba by było dodać konsumentom w stanie ustalonym jeśli tempo drukowania pieniądza zwiększyłoby się o  $\Delta\sigma$  i strumień użyteczności w stanie ustalonym miał się nie obniżyć? Ta wielkość jest często używana jako miara kosztu inflacji.

## Zadanie

Rozpatrz model Ramseya z formowaniem się przyzwyczajęń konsumpcyjnych (ang. *habit formation*) i endogeniczą podażą pracy. Gospodarstwo domowe maksymalizuje następującą funkcję:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(\frac{c_t}{h_t}, 1 - l_t\right),$$

gdzie  $h_t$  oznacza poziom przyzwyczajęń ewoluujący wg wzoru:

$$h_{t+1} = c_t + \alpha h_t,$$

zaś  $l_t$  to podaż pracy. Przyjmujemy, że  $\alpha \in (0, 1)$ .

1. Zapisz ograniczenie budżetowe gospodarstwa w przypadku wymiany w okresie  $t = 0$ , i określ równowagę Arrowa-Debreu.
2. Napisz funkcję Lagrange'a i znajdź warunki pierwszego rzędu.
3. Zapisz ograniczenie budżetowe oraz równanie Bellmana w wymianie następującej co okres. Określ równowagę rekursywną. Dla ułatwienia przyjmij, że nie ma rynku kredytowego.
4. Znajdź warunki pierwszego rzędu z równania Bellmana.
5. Napisz równania określające poziomy  $c, i, l, k, h$  w stanie ustalonym.

## Zadanie

Rozpatrz gospodarke z czystą wymianą w dwóch okresach z rządem. Mamy dwóch konsumentów czerpiących użyteczność z konsumpcji i dostarczanych przez rząd dóbr publicznych:

$$U^i = u(c_1^i, g_1) + \beta u(c_2^i, g_2),$$

przy czym  $u_1, u_2 > 0$  Rząd dysponuje pewną technologią zamiany przychodów podatkowych na  $g$  w skali 1 : 1. Konsumenty dysponują dochodami  $(y_1^i, y_2^i)$ , które rząd opodatkowuje zabierając konsumentom  $\tau_t$ -tą część ich dochodu w okresie  $t$ . Dochód do dyspozycji konsumentów wynosi więc  $(1 - \tau_t)y_t^i$ . **Konsumenty nie mają wpływu na rząd.**

1. Określ równowagę konkurencyjną w tej gospodarce i ją wyznacz przyjmując upraszczające założenia  $u(c, g) = \log c + \log g$  oraz  $y_t^1 + y_t^2 = 1$ .

- Przyjmij, że rząd chce maksymalizować łączną użyteczność społeczeństwa  $U^1 + U^2$  dobierając odpowiedni poziom  $g_1$  i  $g_2$  oraz podatków je finansujących (jest to tzw. problem Ramseya optymalnej polityki fiskalnej). Zapisz problem rządu, funkcję Lagrange'a i znajdź warunki pierwszego rzędu.
- Rozwiąż problem rządu przyjmując upraszczające założenia z punktu 1.

**Wskazówka:** Rząd uwzględnia wynik równowagi konkurencyjnej, która ustala się między konsumentami traktującymi decyzje rządu jako dane. A więc rząd określa  $\tau_t$  i  $g_t$ , ustala się równowaga i dokonuje alokacja, która w połączeniu z  $g_t$  decyduje o  $U^1 + U^2$ .

### Zadanie

Na rynku spotyka się trzech konsumentów o tym samym współczynniku dyskontującego  $0 < \beta < 1$  i chwilowej funkcji użyteczności  $u(c)$  dysponujących zasobami  $(y_t^1)_{t=0}^\infty = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ ,  $(y_t^2)_{t=0}^\infty = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $(y_t^3)_{t=0}^\infty = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ .

- Podaj definicję równowagi konkurencyjnej z wymianą w okresie  $t = 0$ .
- Zapisz warunki (układ równań) jakie ją określają.
- Znajdź równowagę Arrowa-Debreu.

### Zadanie

Rozpatrz problem centralnego planisty w modelu Ramseya, który jako zmienną sterującą przyjmuje nie poziom konsumpcji, lecz stopę oszczędności:

$$\max \int_0^\infty e^{\beta t} u((1-s)y) dt \quad \text{pw.} \quad \dot{k} = -\delta k + i, \quad i = sy = sf(k).$$

- Zapisz Hamiltonian wartości bieżącej oraz warunek transversalności.
- Znajdź warunki pierwszego rzędu i równanie opisujące ewolucję  $s$ .
- Znajdź stan ustalony i dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa i funkcji użyteczności CRRA określ stopę oszczędności w stanie ustalonym jako funkcję parametrów strukturalnych modelu.
- Określ stopę oszczędności wyznaczoną przez złotą regułę w modelu Solowa i powiedz jak się ona ma do wyniku poprzedniego podpunktu?

## Zadanie

Konsument żyjący (i pracujący) w dwóch okresach maksymalizujący użyteczność z konsumpcji ( $c$ ) i czasu wolnego ( $l$ ) rozwiązuje następujący problem:

$$\max u(c_1, l_1) + \beta u(c_2, l_2) \quad \text{pw.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-\tau_1)w_1(1-l_1) + \frac{(1-\tau_2)w_2(1-l_2)}{1+r},$$

gdzie stawki wynagrodzeń  $w_i$ , stopa procentowa  $r$  i stopy podatku dochodowego  $\tau_i$  są ustalone. Rząd planuje podwyższenie dzisiejszej stopy o  $\Delta\tau_1$  i obniżkę jutrzejszej o  $\Delta\tau_2$ . Jak (w przybliżeniu liniowym) przy danym  $\Delta\tau_1$  powinien dobrać  $\Delta\tau_2$ , tak by nie zmniejszyć *użyteczności* konsumenta?

## Zadanie

Rozpatrz wariant modelu Ramseya z kosztami instalacji. Gospodarstwa domowe są posiadaczami kapitału i maksymalizują strumień zdyskontowanej użyteczności:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

Kapitał ewoluuje zgodnie ze wzorem:

$$k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + i_t,$$

inwestycje  $i_t$  wiążą się z kosztem instalacji w wysokości  $C(i_t/k_{t-1})$ , gdzie  $C$  jest ściśle wypukłą i różniczkowalną funkcją spełniającą  $C \geq 0$  i  $C(0) = 0$ . Każde gospodarstwo sprzedaje co okres jednostkę pracy. Populacja jest stała.

Firmy działają jeden okres i maksymalizują zysk. Do funkcji produkcji w okresie  $t$  wchodzi kapitał  $k_{t-1}$ .

1. Zapisz ograniczenie budżetowe gospodarstwa w przypadku wymiany w okresie  $t = 0$ , i określ równowagę Arrowa-Debreu.
2. Napisz funkcję Lagrange'a i znajdź warunki pierwszego rzędu.
3. Zapisz ograniczenie budżetowe oraz równanie Bellmana w wymianie następującej co okres. Określ równowagę rekursywną. Dla ułatwienia przyjmij, że nie ma rynku kredytowego.
4. Znajdź warunki pierwszego rzędu z równania Bellmana.
5. Napisz równania określające poziomy  $c, i, k$  w stanie ustalonym.

## Zadanie

Dokonaj zamiany zmiennych w problemie centralnego planisty w modelu Ramseya:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{pw.} \quad c_t + i_t \leq f(k_t), \quad k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t, \quad \forall_t c_t, k_t \geq 0.$$

tak by zmienną sterującą była nie konsumpcja, lecz stopa oszczędności  $s_t = i_t/f(k_t)$ .

1. Zapisz równanie Bellmana.
2. Wyprowadź równanie Eulera.
3. Przyjmij  $\delta = 1$ ,  $u(c) = \ln c$  i  $f(k) = k^\alpha$ . Znajdź zależność  $s_{t+1}(s_t)$ .
4. Pokaż, że jeśli  $s_0 \neq \alpha\beta$  wtedy  $s_t \rightarrow 1$ . Jakie jest optymalne sterowanie  $s_t(k_t)$ ?

## Zadanie

Rozpatrz model realnego cyklu koniunkturalnego, w którym reprezentatywne gospodarstwo domowe staje przed problemem:

$$\max E \sum_{t=0}^{\infty} b^t (\ln c_t + \alpha \ln(1 - h_t))$$

pod warunkiem dynamiki aktywów:

$$a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t h_t - c_t.$$

Naturalnie na konsumentów narzucamy warunek NPG.  $h_t$  oznacza przepracowane czas (z jednostki do dyspozycji).  $a_t = k_t + b_t$ , gdzie  $k_t$  to posiadany kapitał,  $b_t$  wierzytelności innych gospodarstw domowych.

Firmy dysponują technologią:

$$y_t = A_t f(k_t, h_t) = A_t k_t^\theta h_t^{(1-\theta)},$$

gdzie  $A_t$  to stochastyczny poziom technologii. Firmy maksymalizują zysk:

$$\pi_t = y_t - r_t k_t - w_t h_t - \delta k_t,$$

gdzie  $\delta$  to stopa amortyzacji. Firmy działają na doskonale konkurencyjnym rynku.

1. Określ równowagę w tej gospodarce.
2. Pokaż, że w każdym okresie, w każdym stanie świata spełniona jest równość:

$$h_t = \frac{1 - \theta}{1 - \theta + \alpha \frac{c_t}{y_t}}.$$

## Zadanie

Przyjmij, że PKB ewoluuje wg. wzoru:

$$\ln Y_t = b + a \ln Y_{t-1} + u_t,$$

gdzie  $a \in (0, 1)$ ,  $u_t$  interpretowane jako poziom technologii zmienia się zgodnie z:

$$u_t = g + u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Przyjmij oznaczenie  $y_t = \ln Y_t$ .

Niech  $L$  będzie operatorem opóźnień, tj.  $Lx_t = x_{t-1}$ . Określmy operator  $\Delta$  następująco:

$$\Delta = 1 - L.$$

1. Podaj i uzasadnij interpretację  $\Delta y_t$ .
2. Korzystając z operatora  $\Delta$  wyprowadź z podanych równań równanie opisujące ewolucję  $y_t$ , w którym nie występuje  $u_t$ .
3. Jaki jest (permanentny/przejsiowy) wpływ  $\varepsilon_t$  na poziom i tempo wzrostu PKB? Naszkicuj obie funkcje reakcji na impuls (IRF).

## Zadanie

Rozpatrz problem konsumenta czerpiącego stochastyczny dochód z pracy  $y$  i mającego możliwość inwestowania w aktywo nieryzykowne dające stopę zwrotu  $r$  i ryzykowne dające losową stopę zwrotu  $z_t$ . Międzyokresowe ograniczenie budżetowe konsumenta ma postać:

$$a_{t+1} = (a_t + y_t - c_t)[(1 + r)\omega_t + (1 + z_{t+1})(1 - \omega_t)],$$

gdzie  $a$  oznacza aktywa,  $c$  konsumpcję, zaś  $\omega_t$  część dochodu zainwestowaną w aktywo nieryzykowne. Konsument maksymalizuje:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

1. Zapisz równanie Bellmana.
2. Określ warunki pierwszego rzędu.
3. Jaki warunek musi spełniać  $z$  jeśli miałyby być wynikiem równowagi? Zapisz ten warunek używając stochastycznego czynnika dyskontującego.

4. Przyjmij

$$z_{t+1} = \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t},$$

gdzie  $p$  to cena aktywa ryzykownego, zaś  $d$  jego dywidenda. Jaki warunek musi spełniać  $p$ ?

5. Określ cenę aktywa ryzykownego rozwiązując do przodu warunek z poprzedniego punktu.

### Zadanie

Rozpatrz gospodarkę, w której spotyka się wielu identycznych konsumentów maksymalizujących:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [c_t - b(c_t + v_t)^2],$$

gdzie  $v_t$  jest szokiem preferencji i.i.d. o wartości oczekiwanej 0.

Międzyokresowe ograniczenie ma postać ( $k$  oznacza kapitał w posiadaniu reprezentatywnego konsumenta):

$$k_{t+1} + c_t = y_t \equiv (1 + \theta)k_t.$$

(produkt jest tworzony wyłącznie z kapitału przy stałych korzyściach skali)

1. Znajdź warunki pierwszego rzędu.
2. Określ IRF szoku preferencji na konsumpcję i produkt.

### Zadanie

Rozpatrz problem konsumenta żyjącego w dwóch okresach maksymalizującego:

$$E[u(c_0, h_0) + \beta u(c_1, h_1)]$$

pod warunkiem

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = w_0 h_0 + \frac{w_1 h_1}{1+r},$$

gdzie  $c$  to konsumpcja  $h$  przepracowane godziny (zmniejszające użyteczność),  $w$  to stawka wynagrodzeń,  $r$  stopa procentowa.  $w_0$  jest dane,  $w_1$  stochastyczne.

1. Znajdź warunki pierwszego rzędu dla problemu konsumenta.
2. Przyjmij  $u(c, h) = \ln c - \ln h$ ,  $r = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = e^X$ , gdzie  $X$  ma rozkład  $N(0, \sigma^2)$ . Określ (posługując się przybliżeniami dla małych  $\sigma^2$ ) jak względna wariancja wynagrodzeń przekłada się na względną wariancję przepracowanych godzin.

# Prosty model RBC

## Założenia modelu

1. Populacja jest stała.
2. Preferencje konsumentów:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

3. Funkcja produkcji:

$$Y = Z_t K_{t-1}^\alpha L^{1-\alpha},$$

gdzie  $Z_t$  jest stochastycznym poziomem technologii ewoluującym wg:

$$\ln Z_t = (1 - \Phi) \ln \bar{Z} + \Phi \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Szok  $\varepsilon_t$  jest iid o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

4. Stopa deprecjacji kapitału wynosi  $\delta$ .
5. Przedmiotem decyzji w chwili  $t$  są  $C_t$  i  $K_t$ .
6. Dane są  $K_{-1}$  i  $Z_0$ .

## Zadanie

1. Zapisz problem centralnego planisty biorącego pod uwagę ograniczenia całej gospodarki.
2. Zapisz równanie Bellmana.
3. Znajdź warunki pierwszego rzędu.

## Zadanie

Rozpatrujemy równowagę zdecentralizowaną, w której konsumenci stają przed ograniczeniem (nie ma rynku kredytowego):

$$K_t = W_t + (1 + R_t)K_{t-1} - C_t.$$

Firmy maksymalizują zysk:

$$\max_{K_{t-1}, L_t} \Pi_t = Z_t K_{t-1}^\alpha L^{1-\alpha} - (R_t + \delta)K_{t-1} - W_t L_t.$$

1. Zapisz warunek NPG i znajdź warunki pierwszego rzędu dla konsumentów.
2. Znajdź warunki pierwszego rzędu dla firm.
3. Pokaż, że równania charakteryzujące ewolucję  $K$  i  $C$  w równowadze pokrywają się z Twoją odpowiedzią na pytanie 2.1c).

### Zadanie

1. Określ deterministyczny (gdyby szoki były zerowe) stan ustalony tego modelu.
2. Dokonaj log-linearyzacji tego modelu. Niech  $X$  będzie dowolną zmienną. Przyjmij:

$$x_t = \ln X_t - \ln \bar{X}_t,$$

gdzie  $\bar{X}$  oznacza wartość  $X$  w stanie ustalonym. Znajdź z warunków pierwszego rzędu i warunków równowagi liniowe warunki wiążące  $c_t$  i  $k_t$ . **Wskazówka:** Chodzi o 2 równania: jedno z wewnątrzokresowego ograniczenia zasobów i drugie międzyokresowe.

3. Znajdź równania określające współczynniki w równania opisujących ewolucję zmiennej stanu i optymalną politykę:

$$k_t = Ak_{t-1} + Bz_t,$$

$$c_t = Ck_{t-1} + Dz_t.$$

**Wskazówka:** Podstaw te równania do poprzednio uzyskanych warunków.