Instituto Tecnológico Autónomo de México **J. M. Da Rocha y T. J. Kehoe**
Macroeconomía Dinámica II **Primavera 2004**

Lista de Problemas #5

1. Considere una economía con dos bienes, cada uno de los cuales puede usarse como bien de consumo o inversión. La función de utilidad del consumidor representativo es:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b} .$$

Los bienes de inversión son producidos

$$k_{t+1} - (1-\delta)k_t = d(a_1 x_{1t}^b + a_2 x_{2t}^b)^{1/b} .$$

Los planes de consumo/inversión verifican las restricciones de factibilidad:

$$\begin{aligned} c_{1t} + x_{1t} &= \phi_1(k_{1t}, \ell_{1t}) = k_{1t} \\ c_{2t} + x_{2t} &= \phi_2(k_{2t}, \ell_{2t}) = \ell_{2t} \ . \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} k_{1t} + k_{2t} &= k_t \\ \ell_{1t} + \ell_{2t} &= \ell_t \ . \end{aligned}$$

El valor inicial de k_t es $\bar{k}_0$. ℓ_t es igual a 1. (En otras palabras, todas las variables están expresadas en términos per cápita.)

a) Defina, cuidadosamente, un equilibrio competitivo para esta economía.

b) Reduzca las condiciones de equilibrio a dos ecuaciones en diferencias, en k_t y c_t, y a una condición de transversalidad. Aquí $c_t = d(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$ es el consumo agregado.

c) Suponga ahora que existe un mundo compuesto por m países diferentes, todos con las mismas preferencias y tecnologías, pero diferentes dotaciones iniciales de capital por trabajador, $\bar{k}_0^j$. Los países también poseen diferentes tamaños de población, $\bar{L}^j$. Suponga que no existen préstamos internacionales y por tanto no existen flujos internacionales de capital. Defina un equilibrio para la economía mundial. Pruebe que en equilibrio las variables $c_{it} = \sum_{j=1}^m \bar{L}^j c_{it}^j \Big/ \sum_{j=1}^m \bar{L}^j$, $k_t = \sum_{j=1}^m \bar{L}^j k_t^j \Big/ \sum_{j=1}^m \bar{L}^j$, p_{it}, r_t, y w_t verifican las condiciones de equilibrio de la parte a) donde $\bar{k}_0 = \sum_{j=1}^m \bar{L}^j \bar{k}_0^j \Big/ \sum_{j=1}^m \bar{L}^j$.

d) Considere el caso donde $\delta = 1$. Sea $z_0 = \beta r_0 c_0 / k_0$ y $z_0 = c_0 / (\beta r_0 k_0)$, $t = 1, 2, \ldots$. Transforme las dos ecuaciones en diferencias de parte b) en dos ecuaciones en diferencias en k_t y z_t. Pruebe que

$$\frac{k_t^i - k_t}{k_t} = \frac{z_t}{z_{t-1}}\left(\frac{k_{t-1}^i - k_{t-1}}{k_{t-1}}\right) = \frac{z_t}{z_0}\left(\frac{\overline{k}_0^i - \overline{k}_0}{\overline{k}_0}\right).$$

e) Considere otra vez $\delta = 1$. Sea $s_t = c_t / y_t$ donde $y_t = p_{1t}k_t + p_{2t} = d(a_1 k_t^b + a_2)^{1/b}$. Transforme las dos ecuaciones en diferencias de la parte b) en dos ecuaciones en diferencias en k_t y s_t. Pruebe que

$$\frac{y_t^i - y_t}{y_t} = \frac{s_t}{s_{t-1}}\left(\frac{y_{t-1}^i - y_{t-1}}{y_{t-1}}\right) = \frac{s_t}{s_0}\left(\frac{y_0^i - y_0}{y_0}\right)$$

donde $y_t^i = p_{1t}y_{1t}^i + p_{2t}y_{2t}^i = r_t k_t^i + w_t$.

f) Suponga que $\delta = 1$, que $c_t = dc_{1t}^{a_1}c_{2t}^{a_2}$ y que $k_{t+1} = dx_{1t}^{a_1}x_{2t}^{a_2}$. (Este es, por supuesto, el caso límite cuando $b = 0$.) Encuentre las nuevas soluciones analíticas a los apartados b, c, d, y e.