Tips para Contestar Lista de Problemas #5

a) Defina, cuidadosamente, un equilibrio competitivo para esta economía.

Pista: el problema de consumidor representativo es

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log d(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$$

$$\text{s.t. } p_{1t}c_{1t} + p_{2t}c_{2t} + q_t k_{t+1} = w_t + [q_t(1-\delta) + r_t]k_t$$

$$c_{jt} \geq 0, \; k_t \geq 0$$

$$k_0 = \bar{k}_0 .$$

Puesto que $\log d(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b} = \log d + \log(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$, maximizar $\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$ es maximizar $\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log d(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$.

b) Reduzca las condiciones de equilibrio a dos ecuaciones en diferencias, en k_t y c_t, y a una condición de transversalidad. Aquí $c_t = d(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$ es el consumo agregado.

Escribir las condiciones de primer orden del consumidor representativo y de los productores de los dos bienes y del bien de inversión, incluyendo la condición de transversalidad del problema del consumidor.

Escribir las condiciones de primer orden del problema

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t$$

$$\text{s.t. } c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = d(a_1 k_t^b + a_2)^{1/b}$$

$$c_t \geq 0, \; k_t \geq 0$$

$$k_0 = \bar{k}_0$$

Reducir estas condiciones a dos ecuaciones en diferencias en k_t y c_t, y a una condición de transversalidad.

Para contestar esta pregunta, hay que mostrar que las condiciones de equilibrio del modelo con dos sectores son equivalentes a las condiciones de maximización del modelo con un sector. Lo clave es mostrar que en el equilibrio del modelo con dos sectores

$$\frac{c_{1t}}{c_{2t}} = \frac{x_{1t}}{x_{2t}} = \frac{k_t}{1}.$$

El resto es álgebra.

c) Suponga ahora que existe un mundo compuesto por m países diferentes, todos con las mismas preferencias y tecnologías, pero diferentes dotaciones iniciales de capital por trabajador, $\bar{k}_0^j$. Los países también poseen diferentes tamaños de población, $\bar{L}^j$. Suponga que no existen préstamos internacionales y por tanto no existen flujos internacionales de capital. Defina un equilibrio para la economía mundial. Pruebe que en equilibrio las variables $c_{it} = \sum_{j=1}^m \bar{L}^j c_{it}^j \Big/ \sum_{j=1}^m \bar{L}^j$, $k_t = \sum_{j=1}^m \bar{L}^j k_t^j \Big/ \sum_{j=1}^m \bar{L}^j$, p_{it}, r_t, y w_t verifican las condiciones de equilibrio de la parte a) donde $\bar{k}_0 = \sum_{j=1}^m \bar{L}^j \bar{k}_0^j \Big/ \sum_{j=1}^m \bar{L}^j$.

El problema del consumidor representativo en país i es

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log d\left(a_1 (c_{1t}^i)^b + a_2 (c_{2t}^i)^b\right)^{1/b}$$

$$\text{s.t. } p_{1t} c_{1t}^i + p_{2t} c_{2t}^t + q_t^i k_{t+1}^i = w_t^i + [q_t^i (1-\delta) + r_t^i] k_t^i$$

$$c_{jt}^i \geq 0,\ k_t^i \geq 0$$

$$k_0^i = \bar{k}_0^i.$$

Lo clave es mostrar que en el equilibrio

$$q_t^i = q_t,\ w_t^i = w_t,\ r_t^i = r_t$$

en todos los países. El resto es álgebra.

d) Considere el caso donde $\delta = 1$. Sea $z_0 = \beta r_0 c_0 / k_0$ y $z_t = c_{t-1} / k_t$, $t = 1, 2, \ldots$. Transforme las dos ecuaciones en diferencias de parte b) en dos ecuaciones en diferencias en k_t y z_t. Pruebe que

$$\frac{k_t^i - k_t}{k_t} = \frac{z_t}{z_{t-1}} \left(\frac{k_{t-1}^i - k_{t-1}}{k_{t-1}} \right) = \frac{z_t}{z_0} \left(\frac{\bar{k}_0^i - \bar{k}_0}{\bar{k}_0} \right).$$

Esto está en las notas.

e) Considere otra vez $\delta = 1$. Sea $s_t = c_t / y_t$ donde $y_t = p_{1t}k_t + p_{2t}\overline{\ell} = d(a_1 k_t^b + a_2 \overline{\ell}^b)^{1/b}$. Transforme las dos ecuaciones en diferencias de la parte b) en dos ecuaciones en diferencias en k_t y s_t. Pruebe que

$$\frac{y_t^i - y_t}{y_t} = \frac{s_t}{s_{t-1}}\left(\frac{y_{t-1}^i - y_{t-1}}{y_{t-1}}\right) = \frac{s_t}{s_0}\left(\frac{y_0^i - y_0}{y_0}\right)$$

donde $y_t^i = p_{1t}y_{1t}^i + p_{2t}y_{2t}^i = r_t k_t^i + w_t$.

Esto está en las notas.

f) Suponga que $\delta = 1$, que $c_t = dc_{1t}^{a_1}c_{2t}^{a_2}$ y que $k_{t+1} = dx_{1t}^{a_1}x_{2t}^{a_2}$. (Este es, por supuesto, el caso límite cuando $b = 0$.) Encuentre las nuevas soluciones analíticas a los apartados b, c, d, y e.

Resolver el problema

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t$$

$$\text{s.t. } c_t + k_{t+1} = dk_t^{a_1}$$

$$c_t \geq 0\,,\ k_t \geq 0$$

$$k_0 = \overline{k}_0$$

para obtener $k_{t+1} = a_1 \beta d k_t^{a_1}$ y $c_t = (1 - a_1\beta) d k_t^{a_1}$. El resto es álgebra (pero es álgebra interesante).