Instituto Tecnológico Autónomo de México **T. J. Kehoe**
Tópicos en Economía Internacional **Primavera 2005**

Lista de Problemas #3

1. Considere una economía con dos bienes, cada uno de los cuales puede usarse como bien de consumo o inversión. La función de utilidad del consumidor representativo es:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_{1t}^{a_1} c_{2t}^{a_1}) .$$

Aquí $0 < \beta < 1$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, y $a_1 + a_2 = 1$. Los bienes de inversión son producidos

$$k_{t+1} - (1-\delta)k_t = dx_{1t}^{a_1} x_{2t}^{a_1} .$$

Los planes de consumo/inversión verifican las restricciones de factibilidad:

$$\begin{aligned} c_{1t} + x_{1t} &= \phi_1(k_{1t}, \ell_{1t}) = k_{1t} \\ c_{2t} + x_{2t} &= \phi_2(k_{2t}, \ell_{2t}) = \ell_{2t} \quad . \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} k_{1t} + k_{2t} &= k_t \\ \ell_{1t} + \ell_{2t} &= \ell_t \quad . \end{aligned}$$

El valor inicial de k_t es $\bar{k}_0$. ℓ_t es igual a 1. (En otras palabras, todas las variables están expresadas en términos per cápita.)

a) Defina, cuidadosamente, un equilibrio competitivo para esta economía.

b) Reduzca las condiciones de equilibrio a dos ecuaciones en diferencias, en k_t y c_t, y a una condición de transversalidad. Aquí $c_t = dc_{1t}^{a_1} c_{2t}^{a_1}$ es el consumo agregado.

c) Suponga ahora que existe un mundo compuesto por m países diferentes, todos con las mismas preferencias y tecnologías, pero diferentes dotaciones iniciales de capital por trabajador, $\bar{k}_0^j$. Los países también poseen diferentes tamaños de población, $\bar{L}^j$. Suponga que no existen préstamos internacionales y por tanto no existen flujos internacionales de capital. Defina un equilibrio para la economía mundial. Pruebe que en equilibrio las variables $c_{it} = \sum_{j=1}^{m} \bar{L}^j c_{it}^j \Big/ \sum_{j=1}^{m} \bar{L}^j$, $k_t = \sum_{j=1}^{m} \bar{L}^j k_t^j \Big/ \sum_{j=1}^{m} \bar{L}^j$, p_{it}, r_t, y w_t verifican las condiciones de equilibrio de la parte a donde $\bar{k}_0 = \sum_{j=1}^{m} \bar{L}^j \bar{k}_0^j \Big/ \sum_{j=1}^{m} \bar{L}^j$.

d) Considere el caso donde $\delta = 1$. Sea $z_0 = c_0 / (\beta r_0 k_0)$ y $z_t = c_{t-1} / k_t$, $t = 1, 2, \ldots$. Transforme las dos ecuaciones en diferencias de la parte b en dos ecuaciones en diferencias en k_t y z_t. Pruebe que

$$\frac{k_t^i - k_t}{k_t} = \frac{z_t}{z_{t-1}} \left(\frac{k_{t-1}^i - k_{t-1}}{k_{t-1}} \right) = \frac{z_t}{z_0} \left(\frac{\bar{k}_0^i - \bar{k}_0}{\bar{k}_0} \right).$$

e) Considere otra vez $\delta = 1$. Sea $s_t = c_t / y_t$ donde $y_t = p_{1t} k_t + p_{2t} = d k_t^{a_1}$. Transforme las dos ecuaciones en diferencias de la parte b en dos ecuaciones en diferencias en k_t y s_t. Pruebe que

$$\frac{y_t^i - y_t}{y_t} = \frac{s_t}{s_{t-1}} \left(\frac{y_{t-1}^i - y_{t-1}}{y_{t-1}} \right) = \frac{s_t}{s_0} \left(\frac{y_0^i - y_0}{y_0} \right)$$

donde $y_t^i = p_{1t} y_{1t}^i + p_{2t} y_{2t}^i = r_t k_t^i + w_t$.

f) Suponga que $\delta = 1$, pero que la función de utilidad es

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(a_1 c_{1t}^b + a_2 c_{2t}^b)^{1/b}$$

y que la función de producción de inversión es

$$k_{t+1} = d\,(a_1 x_{1t}^b + x_{2t}^b)^{1/b}.$$

Explique la importancia de los resultados de las partes d y e en este contexto.

2. Busque los datos necesarios para calcular la tasa de intercambio real entre dos países que tienen una relación comercial que es importante al menos para uno de los dos países. Busque datos de un índice de precios de bienes comerciables. Calcule la descomposición de la tasa de intercambio real de la forma

$$rer_t = rer_t^T + rer_t^N,$$

donde rer_t es el logaritmo natural de la tasa de intercambio real y rer_t^T es el logaritmo natural de la tasa de intercambio real de los bienes comerciables. Calcule la correlación entre rer_t y rer_t^N en niveles, en diferencias de un año, y en diferencias de cuatro años. Con los mismos datos, calcule el ratio de la desviación estándar de rer_t^N y la desviación estándar rer_t en niveles, en diferencias de un año, y en diferencias de cuatro años.

Calcule una descomposición de varianza de rer_t en términos de rer_t^T y rer_t^N en niveles, en diferencias de un año, y en diferencias de cuatro años.

3. Busque datos anuales de producto real, inversión real, horas trabajadas, y populación en edad de trabajar para algún país. Si hay datos suficientes para otras variables, calibre una tasa de depreciación anual δ y una porción de capital α. De otro modo, utilice los valores $\delta = 0.05$ y $\alpha = 0.30$ en lo que sigue.

a) Utilice los datos de inversión real para construir una serie del stock de capital siguiendo la regla

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$
$$K_{T_0} = \bar{K}_{T_0}\,.$$

donde T_0 es el primer año para el cual tiene datos de producto y inversión. Elige $\bar{K}_{T_0}$ en tal manera que

$$K_{T_0+1} / K_{T_0} = (K_{T_0+10} / K_{T_0})^{1/10}\,.$$

b) Repite la parte a, pero elige $\bar{K}_{T_0}$ en tal manera que

$$K_{T_0} / Y_{T_0} = \left(\sum_{t=T_0}^{T_0+9} K_t / Y_t\right)/10\,.$$

c) Compare las dos series construidas en las partes a y b.

d) Haga un ejercicio de contabilidad de crecimiento para esta economía. Es decir, decomponga el crecimiento y las fluctuaciones en el PIB real entre tres factores, el primero de los cuales depende en la productividad total de factores, el segundo de los cuales depende en el ratio capital/ingreso, y el tercero de los cuales depende en las horas trabajadas por persona en edad de trabajar. Discuta lo que ocurre en períodos distintos de tiempo.