El modelo de generaciones sucesivas

Timothy J. Kehoe*

Clare College, Cambridge - Inglaterra

1. Introducción

El modelo de generaciones sucesivas de Samuelson (1958) posee ciertas características que no son compartidas por modelos de equilibrio general, con un número finito de bienes y de consumidores. En particular, puede contener equilibrios que no son eficientes en el sentido de Pareto; puede también poseer equilibrios en que un determinado nivel de deuda nominal, frecuentemente identificada como dinero fiduciario cuando ésta es positiva, es pasada sucesivamente de un período al siguiente, y asimismo, puede tener un continuo de equilibrios de forma genérica. Estos rasgos, entre otros, han hecho a este modelo popular en la discusión de aspectos teóricos de temas tales como la Seguridad Social y la Deuda Nacional [Diamond (1965)], la política monetaria [Lucas (1972)] y los tipos de cambio internacionales [Kareken y Wallace (1981)].

En este artículo nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Por qué el modelo de generaciones sucesivas posee unas características tan diferentes de los modelos finitos? Parece más adecuado considerar los modelos con un número infinito de consumidores y de bienes como idealizaciones. Son útiles en la medida en que nos ayudan a conocer las propiedades de modelos con un número elevado, pero finito, de bienes y de consumidores. Por consiguiente, también nos planteamos la siguiente pregunta: ¿En qué medida las propiedades del modelo de generaciones sucesivas nos ayudan a entender las propiedades de modelos con un número elevado, pero finito, de bienes y consumidores?

2. Un modelo sencillo

Empezamos considerando un modelo sencillo de generaciones sucesivas en que existe un bien en cada período y un consumidor en cada generación, el cual vive durante dos períodos. Un análisis completo de este modelo ha sido ofrecido por Gale (1973). Aquí meramente desarrollamos un ejemplo sencillo para ilustrar las propiedades generales que dicho modelo posee.

Empezaremos considerando la versión del modelo en que el tiempo va desde $-\infty$ a ∞. Denominaremos a éste el *modelo infinito sin principio ni fin.* El consumidor nacido en el período t, $-\infty < t < \infty$, tiene una función de utilidad de la forma

$$u(c_t^t, c_{t+1}^t) = \log c_t^t + a \log c_{t+1}^t$$

* La investigación presentada en este artículo ha sido financiada por el National Science Foundation, bajo el proyecto número 85-09484.

Original inglés para CUADERNOS ECONOMICOS DE ICE. Traducción de M. Santos.

sobre el consumo en los períodos t y $t + 1$. Posee en el primer período de su vida w_1 unidades del único bien existente, y w_2 unidades en el segundo. Téngase en cuenta que este modelo tiene una estructura temporal estacionaria: las características que definen los consumidores permanecen invariables con el transcurso del tiempo.

Una interpretación de este modelo es la interpretación tradicional Walrasiana: todos los consumidores se reúnen, un subastador anuncia los precios, los consumidores entonces anuncian propuestas de intercambio. Y el subastador ajusta los precios hasta que los intercambios se igualan. Bajo esta interpretación t meramente es un índice de bienes, y no existe razón alguna para pensar que el modelo es dinámico. Bajo una interpretación alternativa, los mercados son secuenciales, pero se permiten contratos intertemporales y existe previsión perfecta del futuro.

Bajo la primera interpretación el consumidor se enfrenta a una única restricción presupuestaria:

$$p_t c_t^t + p_{t+1} c_{t+1}^t = p_t w_1 + p_{t+1} w_2$$

En la segunda interpretación el consumidor se enfrenta a dos restricciones presupuestarias:

$$p_t c_t^t + m_t = p_t w_1$$

$$p_{t+1} c_{t+1}^t = p_{t+1} w_2 + m_t$$

Aquí m_t es la cantidad de deuda privada, o dinero interno, que el consumidor guarda del período t para el período $t + 1$. Permitiremos que m_t sea negativo, admitiendo así la existencia de deudas. Implícitamente, estamos suponiendo que existe un mercado perfecto de capital de créditos y débitos. Añadiendo estas dos restricciones conjuntamente se obtiene la misma restricción presupuestaria que en la primera interpretación del modelo.

La consideración de que cada consumidor posee dos restricciones presupuestarias nos ofrece una forma alternativa de ver los precios relativos. Supongamos que r_t es la tasa de interés de prestar y pedir prestado del período t al período $t + 1$. Normalicemos también los precios actuales del bien de consumo en el período t a la unidad. Entonces las restricciones presupuestarias del consumidor adquieren la forma

$$c_t + m_t = w_t$$

$$c_{t+1} = w_{t+1} + (1 + r_t) m$$

Estas pueden ser reducidas a la única restricción presupuestaria

$$c_t + c_{t+1} / (1 + r_t) = w_t + w_{t+1} / (1 + r_t)$$

Consecuentemente, $r_t = p_t / p_{t+1} - 1$.

Para facilitar aún más la exposición de nuestro análisis, suponemos $w_1 = 1$, $w_2 = w$. Si el consumidor se enfrenta a los precios (p_t, p_{t+1}), entonces sus demandas de bienes vienen dadas por las tan familiares funciones de demanda Cobb-Douglas

$$c_t^t = \frac{1}{1+a} \quad \frac{p_t + p_{t+1}w}{p_t}$$

$$c_{t+1}^t = \frac{a}{1+a} \quad \frac{p_t + p_{t+1}w}{p_{t+1}}$$

Es decir, los gastos de bienes, $p_t c_t^t$, $p_{t+1}c_{t+1}^t$, son proporciones constantes, $1/(1 + a)$ y $a/(1 + a)$, de la renta, $p_t + p_{t+1}w$. Un equilibrio de este modelo es una sucesión infinita de precios $(\ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots)$ que satisface la propiedad de que en cada período la oferta es igual a la demanda:

$$\frac{a}{1+a} \quad \frac{p_{t-1} + p_t w}{p_t} + \frac{1}{1+a} \quad \frac{p_t + p_{t+1}w}{p_t} - (1 + w) = 0$$

Existen dos equilibrios estacionarios de la forma $p_t = \beta^t$, que pueden ser caracterizados solucionando la ecuación cuadrática

$$a - (a + w)\beta + w\beta^2 = 0$$

Dichos equilibrios son $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = a/w$. Soluciones generales de esta ecuación lineal en diferencias adquieren la forma

$$p_t = k_1\beta_1^t + k_2\beta_2^t$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Para que la solución tenga sentido económico es necesario que k_1 y k_2 sean no negativas, de tal forma que p_t tome siempre valores no negativos. El equilibrio está indeterminado. Las constantes k_1 y k_2 determinan un conjunto unidimensional de equilibrios: dos equilibrios no se consideran diferentes si uno es meramente un múltiplo por un escalar positivo del otro. Podemos, por tanto, imponer una normalización tal como $k_1 + k_2 = 1$.

Los equilibrios en este modelo pueden ser ordenados según el criterio de Pareto. Si $p_t = 1$, $-\infty < t < \infty$, entonces

$$u(c_t^t, c_{t+1}^t) = \log \frac{1+w}{1+a} + a \log \frac{a(1+w)}{1+a}$$

Si, por el contrario, $p_t = (a/w)^t$, $-\infty < t < \infty$, entonces

$$u(c_t^t, c_{t+1}^t) = a \log w.$$

De acuerdo con el criterio de Pareto, el primer equilibrio domina al segundo, a no ser que $a/w = 1$. Una forma de probar esto es demostrando que $(1 + w)/(1 + a)$, $a(1 + w)/(1 + a)$ es la única solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \log c_1 + a \log c_2 \\ \text{sujeto a} & c_1 + c_2 = 1 + w, \end{array}$$

es decir, que bajo este equilibrio se maximiza el consumo del estado estacionario sujeto a la restricción de factibilidad. Asimismo, es fácil demostrar que el equilibrio donde $p_t = 1$, en realidad, domina en el sentido de Pareto a los demás equilibrios.

Una forma de ver el papel del dinero fiduciario es considerando un modelo alternativo que comienza en $t = 1$. Denominaremos esta versión el *modelo infinito con principio y sin fin*. Existe un consumidor viejo inicial que no cumple su restricción presupuestaria, ya que demanda m/p_1 unidades de la dotación del consumidor joven; m, que puede ser positivo, negativo o cero, es la cantidad de dinero externo o fiduciario. La condición de equilibrio en el primer período resulta ser entonces

$$\frac{m}{p_1} + \frac{1}{1+a}\,\frac{p_1 + p_2 w}{p_1} - 1 = 0,$$

que, simplificando, se reduce a

$$ap_1 - wp_2 = (1 + a)m$$

Podemos usar esta condición inicial para calcular el valor de k_1

$$a[k_1 + k_2(a/w)] - w[k_1 + k_2(a/w)^2] = (a - w)k_1 = (1 + a)m$$

Excepto en el caso en que $a = w$ (y $a/w = 1$) esta expresión nos dice que $k_1 = 0$ si y sólo si $m = 0$. Si, sin embargo, $m \neq 0$, k_2 puede ser seleccionado de forma arbitraria siempre que $k_1 + k_2(a/w)^t$ resulte ser positivo para $t = 1, 2, \ldots$ Ahora ya no necesitamos considerar el signo de esta expresión para valores negativos de t, ni tampoco podemos hacer una normalización de precios si $m \neq 0$, puesto que el propio m es el numerario. Esto quiere decir que, exceptuando el caso degenerado en que $a = w$, existe indeterminación si y sólo si hay un volumen de dinero fiduciario distinto de cero.

3. Variaciones del modelo sencillo

En el modelo sencillo de la sección anterior la cantidad de deuda nominal transferida de la generación t a la generación $t + 1$ es $m_t = ap_{t-1} - wp_t$. Es necesario tener en cuenta que esta cantidad permanece constante a lo largo del tiempo:

$$m_t = a[k_1 + k_2(a/w)^{t-1}] - w[k_1 + k_2(a/w)^t] = (a - w)k_1$$

La cantidad de dinero pasada de generación en generación puede ser interpretada como dinero fiduciario en el modelo infinito con principio y sin fin. No debería ser interpretada de la misma forma en el modelo infinito sin principio ni fin. En este último caso, todos los consumidores satisfacían sus restricciones presupuestarias con igualdad. Por tanto, parece más adecuado pensar que la deuda nominal transferida de generación en generación es dinero interno.

Con el fin de profundizar más sobre este punto, reinterpretemos el modelo en que el tiempo va desde $-\infty$ a ∞ como un modelo con una fecha inicial fija. Existen dos bienes en cada período y dos consumidores en cada generación, excepto en la generación inicial. El consumidor 1 de cada generación tiene preferencias y dotaciones solamente por el bien 1. Su función de utilidad es

$\log c_{1t}^{1t} + a \log c_{1t+1}^{1t}$, y su dotación viene dada por $(1, w)$. Por el contrario, las preferencias y dotaciones del consumidor 2 son relativas al bien 2. La función de utilidad es $a \log c_{2t}^{2t} + \log c_{2t+1}^{2t}$, y el perfil temporal de su dotación viene dado por el vector $(w, 1)$. La generación vieja inicial está compuesta de un solo consumidor que tiene preferencias y dotaciones por ambos bienes. Su función de utilidad es $\log c_{11}^{0} + a \log c_{21}^{0}$. Este consumidor está dotado con una unidad del primer bien y w unidades del segundo. Por construcción, los equilibrios de este modelo son idénticos a los del modelo infinito sin principio ni fin: Sea p_{it} el precio del bien i en el período t, entonces $[(p_{11}, p_{21}), (p_{12}, p_{22}), ...]$ es un equilibrio del modelo infinito con principio y sin fin con dos bienes en cada período si y sólo si $(..., p_{22}, p_{21}, p_{11}, p_{12}, ...)$ es un equilibrio del modelo infinito sin principio ni fin con un bien en cada período.

La reestructuración de los períodos temporales y los bienes se ilustra en el gráfico 1.

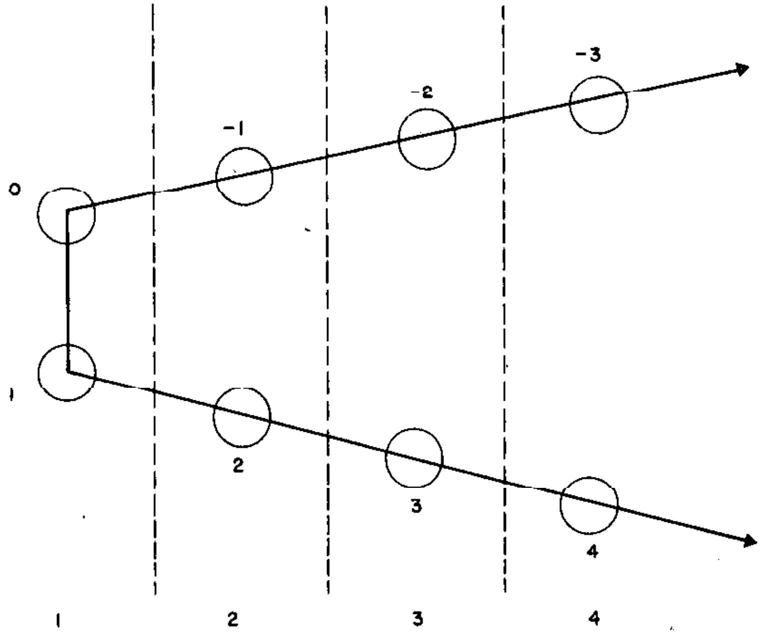

GRAFICO 1

Los precios de equilibrio son

$$p_{1t} = k_1 + k_1(a/w)^t$$
$$p_{2t} = k_1 + k_2(a/w)^{1-t}$$

Téngase en cuenta que este modelo todavía posee un conjunto unidimensional de equilibrios. Sin embargo, no existe deuda nominal que sea pasada de período en período: un consumidor pide prestado al consumidor del otro tipo de la misma generación y le paga en el período siguiente.

Existe aún otra reinterpretación de este modelo, un modelo con una fecha fija inicial e incertidumbre sobre dos estados de la naturaleza: exceptuando la generación inicial, en el estado 1 el consumidor representativo de la generación t tiene una función de utilidad $\log c_t^t + a \log c_{t+1}^t$ sobre el único bien de consumo y dotación $(1, w)$. En el estado 2 tiene la función de utilidad $a \log c_t^t + \log c_{t+1}^t$, y dotación $(w, 1)$. Suponemos que la innovación aleatoria ocurre antes del nacimiento de la segunda generación. Dicha generación, y las subsiguientes, no pueden asegurarse sobre el estado en que van a nacer, y, por tanto, se enfrentan a dos restricciones presupuestarias. La generación inicial vieja está dotada con una unidad en el estado 1 y w unidades en el estado 2. Además posee una función de utilidad $\log c_1$ que cumple los postulados de Von Neumann y Morgenstern y asigna la probabilidad $1/(1 + a)$ a la ocurrencia del estado 1, y $a/(1 + a)$ a la ocurrencia del estado 2. Los equilibrios de este modelo son también isomórficos a los del modelo infinito sin principio ni fin.

Aunque la incertidumbre en este modelo toma una forma simple e irreal, el modelo en sí mismo es interesante, puesto que ilustra un principio general: en un escenario determinista no existe ninguna diferencia sobre la consideración de mercados que se abren de forma secuencial o sobre la consideración de un marco Arrow-Debreu en que todas las transacciones se realizan en el período inicial. En un escenario estocástico, sin embargo, sí existe diferencia. En particular, si se permite que los consumidores hagan contratos de títulos contingentes en el período 1, entonces éstos los efectuarán y, exceptuando algunos casos, esto tendrá consecuencias sobre la conformación del equilibrio. Supongamos que se permiten dichos contratos, y supongamos que el consumidor representativo de la generación t asigna una probabilidad subjetiva π_i a la ocurrencia del estado i, $i = 1, 2$, donde $\pi_i \geq 0$ y $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Entonces su problema de maximización de la utilidad esperada resulta ser

$$\begin{aligned} &\text{maximizar:} && \pi_i(\log c_{1t}^t + a \log c_{1t+1}^t) + \pi_2(a \log c_{2t}^t + \log c_{2t+1}^t) \\ &\text{sujeto a:} && p_{1t}c_{1t}^t + p_{1t+1}c_{1t+1}^t + p_{2t}c_{2t}^t + p_{2t+1}c_{2t+1}^t = \\ &&& = p_{1t} + p_{1t+1}w + p_{2t}w + p_{2t+1} \end{aligned}$$

Puesto que el consumidor tiene una única restricción presupuestaria, la solución de este problema de maximización está asociada con un único multiplicador de Lagrange. Exceptuando el caso degenerado en que $\pi_1 = \pi_2$ y $p_{it'} = 1$, $i = 1, 2$, $-\infty < t < \infty$, es fácil ver que en ningún equilibrio de la versión previa del modelo puede ser un equilibrio de esta versión.

Con el fin de profundizar más en la distinción sobre dinero interno y dinero fiduciario, consideremos un modelo en que el consumidor t, $-\infty < t \leq 0$, tiene una función de utilidad $\log c_t^t + \log c_{t+1}^t$ y un flujo de dotaciones $(1, w_1)$, donde $w_1 > 1$, y el consumidor t, $1 \leq t < \infty$, tiene una función de utilidad $\log c_t^t + \log c_{t+1}^t$ y un flujo de dotaciones $(w_2, 1)$, donde $w_2 > 1$. Las condiciones de equilibrio para este modelo vienen definidas por:

$$p_{t-1} - (1 + w_1)p_t + w_1 p_{t+1} = 0 \qquad -\infty < t \leq 0$$

$$p_0 - (w_1 + w_2)p_1 + p_2 = 0$$

$$w_2 p_{t-1} - (w_2 + 1)p_t + p_{t+1} = 0 \qquad 2 \leq t < \infty$$

Es fácil verificar que

$$p_t = \begin{cases} w_1^{-t+1} & -\infty < t \leqslant 1 \\ w_2^{t-1} & 1 \leqslant t < -\infty \end{cases}$$

es un equilibrio de este modelo.

Supongamos que además de los consumidores 0 y 1 existe un consumidor que vive en el período 1 y que tiene preferencias y dotaciones solamente por el bien 1. Si no existe dinero fiduciario, entonces su función de exceso de demanda es idénticamente igual a 0. Por el contrario, si dotamos a este consumidor con una cantidad de dinero fiduciario, entonces la condición de equilibrio en el primer período resulta ser

$$p_0 - (w_1 + w_2)p_1 + p_2 + 2m = 0$$

Si, por ejemplo, $m = (w_1 + w_2 - 2)/2 > 0$, entonces $p_t = 1$, $-\infty < t < \infty$, es un equilibrio. En este modelo el dinero fiduciario tiene un papel que desempeñar, en el modelo previo no lo tiene. Como en el modelo previo, sin embargo, este modelo puede ser reinterpretado como un modelo en el que existe una fecha inicial fija y dos bienes en cada período, con dos consumidores por cada generación, o en el que existe incertidumbre.

4. Propiedades del modelo de generaciones sucesivas

Un modelo con un número finito de bienes y de consumidores no posee ninguno de los rasgos peculiares del modelo de generaciones sucesivas: el Primer Teorema de la Economía del Bienestar establece que todo equilibrio en dicho modelo finito es eficiente en el sentido de Pareto. La Ley de Walras afirma que ningún consumidor puede gastar más de su renta, a no ser que otro consumidor gaste menos, de tal forma que no puede existir dinero fiduciario. Mediante la contabilización del número de ecuaciones y de incógnitas se deduce, como Debreu (1970) ha demostrado, que casi todos estos modelos poseen un número finito de equilibrios.

Consideremos una conomía con h consumidores y n bienes. Supongamos que el consumidor j tiene una función de utilidad de la forma $u_j(c_1^j, \ldots, c_n^j)$, que es monótona creciente en el sentido $\partial u_j/\partial c_i > 0$ para todo i, $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que su vector de dotaciones es $(w_1^j, \ldots, w_n^j)$. Un equilibrio del modelo es un vector de precios $(\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n)$, asociado con un esquema de asignación de consumo $(\hat{c}_1^j, \ldots, \hat{c}_n^j)$ para cada consumidor, de tal forma que $(\hat{c}_1^j, \ldots, \hat{c}_n^j)$ es una solución del problema de maximización de utilidad

maximizar: $u_j(c_1^j, \ldots, c_n^j)$

sujeto a: $\Sigma_{i=1}^n \hat{p}_i c_i^j = \Sigma_{i=1}^n \hat{p}_i w_i^j$

y que la oferta es igual a la demanda:

$$\Sigma_{j=1}^h \hat{c}_i^j = \Sigma_{j=1}^h w_i^j, \quad i = 1, \ldots, n$$

Cualquier equilibrio de este modelo es eficiente en el sentido de Pareto. La prueba más simple de esto se encuentra en Debreu (1954): supongamos que existe otra asignación factible de bienes que domina, en el sentido de Pareto, a la asginación de equilibrio. Multiplicando los componentes de la asignación por los precios de equilibrio y agregando, entonces la asignación debe tener un valor superior a la asignación de equilibrio; de lo contrario, la asignación de equilibrio no maximizaría utilidad. Puesto que la asignación preferida en el sentido de Pareto es factible, sin embargo, no debe tener un valor superior al vector de dotaciones agregadas. Esta contradicción establece que no puede existir una asignación factible de bienes que domine en el sentido de Pareto a la asignación de equilibrio.

Téngase en cuenta que esta prueba se extiende al modelo en que o bien el número de consumidores o el número de bienes es finito: aunque exista un número infinito de bienes, con un número finito de consumidores, el valor de la dotación de cada consumidor debe ser finito en equilibrio, ya que de lo contrario su problema de maximización no tendría solución. Aunque exista un número infinito de consumidores, con un número finito de bienes, la asignación agregada de cada bien debe ser finita en equilibrio; de lo contrario, sería imposible igualar la oferta a la demanda.

¿Dónde falla entonces la prueba en el caso del modelo de generaciones sucesivas? El valor de la dotación agregada de la economía no es necesariamente finito. En el modelo anterior en que t va desde $-\infty$ a ∞ ningún equilibrio tiene esta propiedad. Existe, sin embargo, un equilibrio eficiente en el sentido de Pareto. En el modelo que comienza en $t = 1$, el equilibrio donde $p_t = (a/w)^t$ tiene esta propiedad cuando $a < w$ y es, por tanto, eficiente en el sentido de Pareto. El equilibrio en que $p_t = 1$, aunque no tiene esta propiedad es también eficiente en el sentido de Pareto. Balasko y Shell (1980) y Burke (1986) han establecido un criterio general para la eficiencia de Pareto de los equilibrios de los modelos de generaciones sucesivas que empiezan en $t = 1$. Este criterio es

$$\Sigma_{t=1}^{\infty} 1/||p_t|| = \infty$$

donde $||p_t||$ es la norma del vector de precios p_t. Podemos extender este criterio a modelos infinitos sin principio ni fin, considerando los períodos 0 y 1 en un mismo período, los períodos -1 y 2 en un otro período, y así sucesivamente. Existen ahora dos bienes en cada período. En general puede haber algunos problemas técnicos, puesto que los consumidores demandan solamente algunos bienes en un período, pero no todos los bienes; sin embargo, para el modelo sencillo de la sección anterior el criterio de eficiencia es

$$\Sigma_{t=1}^{\infty} 1/[||p_t|| + ||p_{1-t}||] = \infty$$

El único equilibrio eficiente en el sentido de Pareto es, por tanto, $p_t = 1$.

El dinero no tiene ningún papel que desempeñar en el modelo de un número finito de bienes y consumidores. En otras palabras, ningún grupo de consumidores puede violar sus restricciones presupuestarias en equilibrio, a no ser que esas violaciones se cancelen, en cuyo caso se trata simplemente de meras transferencias. Para ver por qué esto es así, supongamos que algún consumidor gasta estrictamente más o estrictamente menos que su renta, pero que los demás consumidores gastan exactamente su renta. Entonces el valor del gasto de consumo es superior al valor de la renta agregada. Sin embargo, si la demanda de cada bien es igual a la oferta, entonces la suma de todas las demandas multiplicadas por sus respectivos precios, que es igual al gasto de consumo, debe ser igual a la suma de todas las ofertas multiplicadas por sus respectivos precios, que es igual a la renta agregada. Por consiguiente, todo consumidor debe respetar su restricción presupuestaria. Asimismo, este argumento se extiende a modelos en que o bien el número de consumidores o el número de bienes, pero no ambos, es finito. Puede no ser cierto en modelos de generaciones sucesivas, porque el valor de la renta agregada no es necesariamente finito.

Para ver por qué un modelo con un número finito de consumidores y de bienes posee, en general, un número finito de equilibrios, podemos caracterizar la economía usando el concepto de exceso de demanda agregada. Sea $c_i^j(p_1, \ldots, p_n)$, $i = 1, \ldots, n$, la solución del problema individual de maximización de utilidad del consumidor j. El exceso de demanda del bien i se define por medio de

$$z_i(p_1, \ldots, p_n) = \Sigma_{j=1}^{h} c_i^j(p_1, \ldots, p_n) - \Sigma_{j=1}^{h} w_i^j$$

Bajo el supuesto de concavidad en las funciones u_j, entonces las funciones z_i son continuas, al menos para vectores de precios estrictamente positivos. En realidad, Debreu (1972) y Mas-Colell (1974) han demostrado que existe poca pérdida de generalidad imponiendo condiciones que garanticen que las funciones z_i sean continuamente diferenciables. La forma de las restricciones presupuestarias de los consumidores implica que solamente tienen importancia los precios relativos, que los excesos de demanda son homogéneos de grado cero

$$z(\theta p) = z(p)$$

para todo $\theta > 0$. Aquí tanto z como p son vectores de dimensión n. Las restricciones presupuestarias, junto con el supuesto de monotonía creciente, implican que toda la renta se gasta. Por tanto, z cumple la Ley de Walras:

$$pz(p) \equiv 0.$$

[Aquí, por supuesto, $pz(p)$ es el producto interno $\sum_{i=1}^{n} p_i z_i(p)$.]

Un equilibrio es un vector de precios para el cual $z(p) = 0$.

Este es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. La Ley de Walras implica que una de las ecuaciones no es independiente de las demás; asimismo, la homogeneidad implica que una de las incógnitas sobra. Por tanto, estamos ante un sistema con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. El sistema de n-1 ecuaciones con n-1 incógnitas, formado mediante la supresión de una ecuación y la imposición de una normalización de precios no siempre posee un equilibrio único. (Véase Kehoe, 1985, donde se revisa toda aquella literatura referente a la unicidad del equilibrio en estos modelos.) Sin embargo, siempre que las funciones de exceso de demanda sean continuamente diferenciables, se pueden hacer afirmaciones muy fuertes sobre la unicidad local: de forma más específica, casi todos los modelos en un sentido matemático bien definido poseen un número finito de equilibrios localmente únicos. La idea detrás de este resultado, que se debe originalmente a Debreu, es intuitivamente obvia. Si las ecuaciones que determinan los equilibrios de un modelo son localmente independientes en el sentido que la matriz (n-1) × (n-1) de derivadas parciales no es singular, entonces cualquier perturbación suficientemente pequeña haría que sigan siendo localmente independientes. Por el contrario, si no son localmente independientes, entonces existen perturbaciones arbitrariamente pequeñas que las convertirían en localmente independientes, o harían que localmente dichas ecuaciones no tengan solución. El teorema de la función inversa del cálculo diferencial nos dice que es precisamente la no singularidad de esta matriz de derivadas parciales, lo que se necesita para asegurar que un equilibrio sea localmente único. (Véase Mas-Colell, 1985, donde se ofrece una discusión más detallada, con argumentos más rigurosos.)

El mismo razonamiento se aplica a modelos con un número infinito de consumidores y un número finito de bienes. Los equilibrios de dichos modelos pueden todavía ser caracterizados mediante las soluciones de un sistema de ecuaciones con el mismo número finito de ecuaciones y de incógnitas. En realidad, Debreu (1974) ha demostrado que para cualquier función de exceso de demanda de n bienes que es continua, homogénea de grado cero, y que cumple la Ley de Walras, existen n consumidores maximizadores de utilidad que la generan. Por tanto, las funciones de exceso de demanda de un modelo con un número infinito de consumidores, pero con un número finito de bienes, no se pueden distinguir de las de un modelo que posee solamente un número finito de consumidores.

A primera vista, parece que no existe nada en este razonamiento que pueda ser aplicado a los modelos con un número infinito de bienes y un número finito de consumidores. Si caracterizamos el equilibrio como un vector de precios en que la demanda de cada mercancía es igual a la oferta, entonces estamos ante un número infinito de ecuaciones, una para cada bien, con un número infinito de incógnitas, una para cada precio. Podemos, sin embargo, transformar la caracterización del equilibrio para producir un sistema con el mismo número finito de ecuaciones que de incógnitas. Este enfoque que seguiremos a continuación es debido a Negishi (1960). Su aplicación a modelos dinámicos se debe a Bewley (1982).

Hemos discutido anteriormente que los equilibrios de un modelo con un número finito de consumidores son eficientes en el sentido de Pareto. Este es el Primer Teorema de la Economía del Bienestar. Además, es fácil demostrar que el Segundo Teorema también se cumple en estos modelos. Es decir, cualquier asignación eficiente en el sentido de Pareto tiene asociado un vector de precios eficientes que puede ser convertido en un equilibrio competitivo con transferencias: cualquier asignación Pareto-eficiente puede ser caracterizada como solución del problema de maximización de una suma ponderada de funciones individuales de utilidad sujeto a restricciones de factibilidad. Los multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones de factibilidad son entonces los precios de eficiencia. Usando estos precios para dar valor a cada asignación y dotación del consumidor, y restando entonces un valor del otro, se derivan las transferencias necesarias para implementar el equilibrio competitivo.

Fijando todos los pagos de transferencias iguales a cero, se obtiene un sistema de ecuaciones que caracterizan los equilibrios. Existen h ecuaciones, una para cada consumidor. Existen también h incógnitas, las ponderaciones de la utilidad, en el problema de maximización. Los pagos de transferencias son funciones continuas de las ponderaciones de la utilidad, al menos cuando todas las ponderaciones son positivas. También son homogéneas de grado uno, puesto que multiplicando todas las ponderaciones por una constante positiva no cambia la solución del problema, aunque sí da lugar a un aumento por la misma constante de los multiplicadores de Lagrange. Además, la suma de las transferencias es igual a cero. En realidad, si dividimos cada función de transferencias por la ponderación respectiva de la utilidad, entonces esto tiene las mismas propiedades que una función de exceso de demanda con h bienes; es decir, las funciones resultantes son continuas, homogéneas de grado cero y cumplen la Ley de Walras. Kehoe y Levine (1985) argumentan que casi todos los modelos con un número finito de consumidores, pero con un número infinito de bienes, poseen equilibrios localmente únicos.

Desafortunadamente, no existe nada en este razonamiento que aplique al modelo de generaciones sucesivas, el cual comprende un número infinito de bienes y de consumidores. Aquí los equilibrios están caracterizados por un sistema de un número infinito de ecuaciones con un número infinito de incógnitas. Sin embargo, poco se puede decir del hecho de que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas si dicho número es infinito: existen funciones lineales no degeneradas de un espacio vectorial infinito a sí mismo que no poseen inversa. Esto no puede suceder en un espacio vectorial de dimensión finita puesto que mediante una perturbación arbitrariamente pequeña sobre dicha función, que puede representarse por una matriz con el mismo número de filas y columnas, se consigue la invertibilidad.

El prototipo de una función lineal no degenerada que va de un espacio de dimensión infinita a sí mismo y que no posee inversa es la función de desplazamiento. Sea R^{∞} el espacio de sucesiones infinitas de la forma $(x_1, x_2, \ldots)$. Definamos la función de desplazamiento s mediante la regla

$$s(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Esta función tiene la propiedad de suprayectividad ya que toda sucesión $x \in R^{\infty}$ puede ser expresada en la forma $s(y)$ para algún $y \in R^{\infty}$. Sin embargo, la función no es inyectiva puesto que para toda sucesión $x \in R^{\infty}$, la sucesión $y \in R^{\infty}$ para la cual $s(y) = x$ no es única. Decir que s es suprayectiva significa que es no degenerada. El que s no sea inyectiva quiere decir que no posee una inversa. Si linealizásemos las condiciones de equilibrio de una economía de generaciones sucesivas en un equilibrio indeterminado, podríamos obtener una función que es suprayectiva, pero no inyectiva [véase Santos y Bona (1986)].

5. Modelos estacionarios

Fijamos ahora nuestra atención en modelos estacionarios de generaciones sucesivas con un número arbitrario de consumidores en cada generación y un número arbitrario y finito de bienes en cada período. En estos modelos el alcance de la ineficiencia de Pareto y del dinero fiduciario es al menos tan grande como en nuestro modelo sencillo. Existe un mayor ámbito para la indeterminación. En particular, la indeterminación puede tener más de una dimensión e, incluso, en la versión del modelo infinito con principio y sin fin, la indeterminación puede ocurrir independientemente de que exista o no dinero fiduciario.

Aunque continuamos suponiendo que cada generación, excepto la primera, vive durante dos períodos, este supuesto es totalmente general, dado que se permite la existencia de un número arbitrario de consumidores en cada generación y de un número arbitrario de bienes en cada período. Supongamos que existen h consumidores en cada generación, n bienes en cada período, y cada generación vive durante k períodos. Este modelo es formalmente equivalente a aquél en que existen $(k-1)h$ consumidores en cada generación, $(k-1)n$ bienes en cada período y cada generación vive dos períodos. La razón es que las generaciones se pueden redefinir de tal forma que las generaciones $2\text{-}k$, $3\text{-}k$, ..., 0 conforman la generación 0, las generaciones 1, 2, ..., k-1, constituyen la generación 1, y así, sucesivamente. Los períodos pueden ser redefinidos de forma similar. Estas generaciones redefinidas solamente viven durante dos períodos redefinidos y se solapan solamente con una única generación. Este procedimiento se ilustra en el gráfico 2. Para una descripción detallada, véase Balasko, Cass y Shell (1980).

Generación \ Periodo	1	2	3	4	5	6	...	
-1	X	O	O	O	O	O	...	} 0
0	X	X	O	O	O	O	...	
1	X	X	X	O	O	O	...	} 1
2	O	X	X	X	O	O	...	
3	O	O	X	X	X	O	...	} 2
4	O	O	O	X	X	X	...	
5	O	O	O	O	X	X	...	} 3
6	O	O	O	O	O	X	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
	1		2		3			

GRAFICO 2

Agregaremos las decisiones de consumo y ahorro de la generación t en las funciones de exceso de demanda $y(p_t, p_{t+1})$, correspondiente al período de joven, y $z(p_t, p_{t+1})$, correspondiente al período de vejez; y, z son, por supuesto, vectores de dimensión n. El consumidor j se enfrenta al problema de maximización de utilidad.

maximizar $\quad u_j(y^j + w_1^j,\ z^j + w_2^j)$

sujeto a $\quad p_t y^j + p_{t+1} z^j = 0$

Aquí, y^j representa el vector de intercambios netos efectuados por el consumidor j de la generación t en su período de joven, z^j es el vector de intercambios netos realizados en su último período de vida, w_1^j y w_2^j son vectores de dotaciones. Suponemos de nuevo que las funciones de exceso de demanda son continuamente diferenciables para todos los pares de precios estrictamente positivos (p_t, p_{t+1}). La forma de la restricción presupuestaria en el problema de maximización de utilidad nos permite asumir de forma natural que las funciones de demanda agregada son homogéneas de grado cero,

$$y(\theta p_t, \theta p_{t+1}) \equiv y(p_t, p_{t+1})$$

$$z(\theta p_t, \theta p_{t+1}) \equiv z(p_t, p_{t+1})$$

para todo $\theta > 0$, y que cumplen la Ley de Walras,

$$p_t y(p_t, p_{t+1}) + p_{t+1} z(p_t, p_{t+1}) = 0$$

Al igual que en el modelo sencillo, podemos pensar que los consumidores se enfrentan o bien a una restricción presupuestaria o a dos restricciones presupuestarias de la forma

$$p_t y^j(p_t, p_{t+1}) + m_j = 0$$

$$p_{t+1} z^j(p_t, p_{t+1}) - m_j = 0$$

Además de estas generaciones, existe una generación inicial de consumidores viejos que vive solamente en el primer período. Su función de exceso de demanda agregada adquiere la forma $z_0(p_1, m)$, donde m es la cantidad inicial de dinero fiduciario, el cual puede ser positivo, negativo o cero. Suponemos que z_0 es continuamente diferenciable; asimismo, que es homogénea de grado cero

$$z_0(\theta p_1, \theta m) \equiv z_0(p_1, m)$$

para todo $\theta > 0$, y que cumple la Ley de Walras,

$$p_1 z_0(p_1, m) \equiv m$$

Un equilibrio del modelo infinito con principio y sin fin es una sucesión de vectores precio $(p_1, p_2, \ldots)$ para la cual el exceso de demanda total es igual a cero en cada período:

$$z_0(p_1, m) + y(p_1, p_2) = 0$$

en $t = 1$, y

$$z(p_{t-1}, p_t) + y(p_t, p_{t+1}) = 0$$

para $t > 1$. Es conveniente resaltar que la cantidad de dinero fiduciario debe permanecer fija en términos nominales: la condición de equilibrio en el primer período implica que

$$-p_1 y(p_1, p_2) = p_1 z_0(p_1, m) = m$$

la Ley de Walras implica que

$$p_2 z(p_1, p_2) = -p_1 y(p_1, p_2)$$

la condición de equilibrio en el segundo período implica que

$$-p_2 y(p_2, p_3) = p_2 z(p_1, p_2)$$

y así sucesivamente. Balasko y Shell (1981) han considerado una versión alternativa de este modelo en que existe un gobierno que puede recaudar impuestos sobre los balances monetarios y que puede emitir nuevo dinero en cada período.

Un estado estacionario es un vector de precios p y un factor de inflación β tal que $p_t = \beta^t p$, $-\infty < t < \infty$, es un equilibrio para la versión del modelo infinito sin principio ni fin

$$z(\beta^{t-1}p,\ \beta^t p) + y(\beta^t p,\ \beta^{t+1}p) = 0$$

La condición de homogeneidad nos permite simplificar esta expresión a

$$z(p,\ \beta p) + y(p,\ \beta p) = 0$$

Al igual que en el modelo sencillo podemos pensar que $r = 1/\beta - 1$ es la tasa de interés.

Existen dos tipos de estados estacionarios: estados estacionarios reales, en los cuales la cantidad de deuda nominal transferida de un período a otro, $pz(p, \beta p)$, es igual a cero, y estados estacionarios monetarios, o nominales, en que dicha cantidad no es igual a cero. Por un lado, en el estado estacionario se tiene que

$$pz(p,\ \beta p) + py(p,\ \beta p) = 0$$

Además, la Ley de Walras implica que

$$\beta pz(p,\ \beta p) + py(p,\ \beta p) = 0$$

Calculando la diferencia de ambas expresiones se obtiene

$$(\beta - 1)pz(p,\ \beta p) = 0$$

Por consiguiente, en cualquier estado estacionario nominal debe ser cierto que $\beta = 1$. Gale (1973) denomina a los estados estacionarios en que $\beta = 1$ estados estacionarios de Regla de Oro, porque maximizan una suma ponderada de funciones de utilidad individual sujetos a la restricción de factibilidad de consumo estacionario a lo largo del tiempo. A los estados estacionarios reales los denomina equilibrados, porque no existe transferencia de deuda entre las generaciones. Es posible construir ejemplos, tal como $a = w$ en el modelo sencillo, en que un estado estacionario de Regla de Oro es también equilibrado, esto es, en que $pz(p, \beta p) = 0$ y $\beta = 1$, simultáneamente. Dicho estado estacionario debe cumplir

$$z(p,\ p) + y(p,\ p) = 0$$

$$pz(p,\ p) = 0$$

La Ley de Walras implica que éste es un sistema de n ecuaciones independientes; como consecuencia de la condición de homogeneidad existen solamente $n - 1$ incógnitas independientes. Por consiguiente, no esperaríamos que este sistema tenga solución, a no ser por mera casualidad. En realidad, Kehoe y

Levine (1984) demuestran que casi todas las economías no poseen un estado estacionario en que a la vez $pz(p, \beta p) = 0$ y $\beta = 1$.

En el modelo sencillo existen dos estados estacionarios, el estado estacionario real en que $\beta = a/w$ y el estado estacionario nominal en que $\beta = 1$. De hecho, cualquier modelo con un único bien en cada período, y un único consumidor en cada generación que viva dos períodos, tiene solamente dos estados estacionarios. Puesto que existe solamente un consumidor en cada generación, cualquier clase de intercambio debe ser un intercambio entre generaciones. Puesto que existe solamente un bien en cada período, el intercambio se efectúa solamente si existe una transferencia de deuda nominal de un período a otro. Por tanto, un estado estacionario real viene determinado por una razón de precios relativos $\beta = p_{t+1}/p_t$ que hace que el consumidor representativo prefiera su dotación inicial. Obviamente dicha razón de precios existe; siempre que la curva de indiferencia que contiene su vector de dotaciones sea diferenciable, existe solamente una razón (ver gráfico 3).

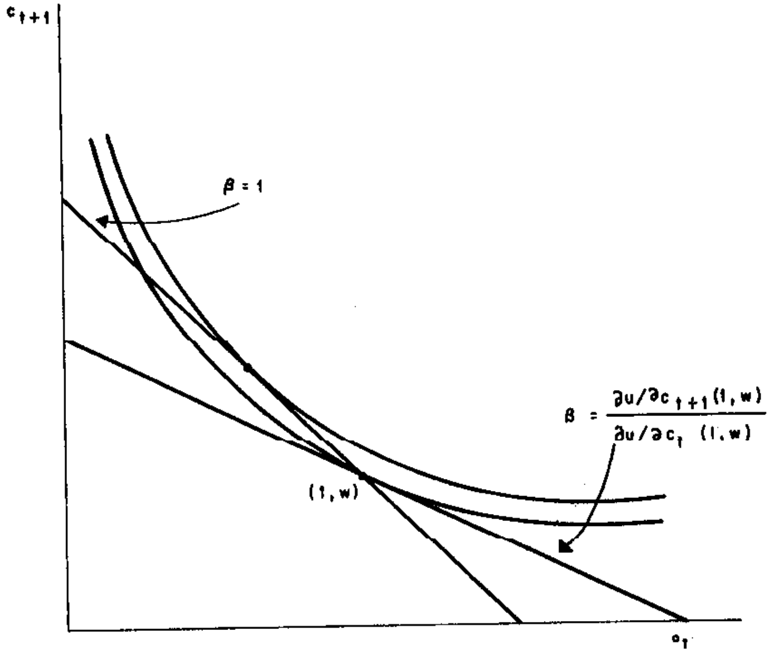

GRAFICO 3

El único estado estacionario nominal ocurre cuando el precio del único bien permanece constante a lo largo del tiempo. La Ley de Walras implica que esta situación satisface la condición del estado estacionario. En general, en este estado estacionario el consumidor representativo prefiere efectuar intercambios.

Con muchos bienes en cada período y muchos consumidores en cada generación, ni los estados estacionarios reales ni los nominales son necesariamente únicos. Sin embargo, Kehoe y Levine (1984) demuestran que existe, en general, un número impar de cada uno de ellos. Sus argumentos son similares a los que se utilizan para probar que el número de equilibrios es impar en una economía de intercambio puro. [Ver Dierker (1972).]

Consideremos de nuevo las condiciones que debe cumplir un equilibrio:

$$z_0(p_1, m) + y(p_1, p_2) = 0$$

para $t = 1$, y

$$z(p_{t-1}, p_t) + y(p_t, p_{t+1}) = 0$$

para $t > 1$. Tomemos cuenta del número de ecuaciones y de incógnitas existentes. Las condiciones de equilibrio en el primer período conforman n ecuaciones con $2n + 1$ incógnitas. Debido a la condición de homogeneidad podemos imponer una normalización de precios para reducir este número a $2n$ incógnitas. Las condiciones de equilibrio en el segundo período dan lugar a n ecuaciones con n incógnitas: ya hemos tenido en cuenta p_1 y p_2 en las condiciones de equilibrio del primer período; lo único que nos quedaba era p_3. Podemos considerar las condiciones de equilibrio a partir del segundo período como una ecuación no lineal en diferencias de segundo orden, determinando p_{t+1} como función de p_{t-1} y p_t. En todo el sistema existen n grados de libertad. En el caso en que $m = 0$, éstos se ven reducidos a $n - 1$.

Este recuento de ecuaciones e incógnitas nos hace ver de forma intuitiva que potencialmente existe un conjunto de equilibrios de dimensión n si $m \neq 0$, y un conjunto de dimensión $n - 1$ si $m = 0$. También nos hace ver claramente por qué la situación en que $n = 1$ es tan especial: en este caso $n - 1 = 0$ y la indeterminación del equilibrio es solamente posible si existe dinero fiduciario. Sin embargo, el problema existente con este mero recuento de ecuaciones e incógnitas es que no podemos saber si se puede construir una senda de precios de equilibrio para todos los valores de p_1, p_2, y m que cumplan las condiciones de equilibrio en el primer período.

Para solventar esta dificultad, Kehoe y Levine (1985) fijan la atención en sendas de precios de equilibrio que convergen a un estado estacionario. Dichas sendas de precios son las más fáciles de analizar. Sendas de precios que no convergen a un estado estacionario pueden exhibir un comportamiento periódico muy complejo, o incluso un comportamiento caótico. [Véase Benhabib y Day (1982)]. Puede ser difícil distinguir dichas sendas de sucesiones de precios que satisfacen las condiciones de equilibrio durante un largo período de tiempo, pero que eventualmente contienen precios que son iguales a cero o negativos, en que los excesos de demanda resultan estar indefinidos, haciendo imposible la continuación de la sucesión. Nuestro ejemplo sencillo posee la propiedad tan atractiva de que las condiciones de equilibrio son lineales. Por consiguiente, es fácil determinar las propiedades globales de las sendas de precios.

Se debe puntualizar que el hecho de que las sendas de precios de equilibrio convergen a un estado estacionario estén determinadas, esto no implica determinación del conjunto de precios de equilibrio. Puede haber sendas que no convergen al estado estacionario pero que, sin embargo, permanecen siempre estrictamente positivas y son, por tanto, equilibrios legítimos. Podemos argumentar, sin embargo, que las dificultades de computación asociadas con dichas sendas hacen inverosímiles dichos equilibrios con previsión perfecta del futuro.

Una de las principales ventajas del estudio de sendas que convergen a estados estacionarios es que se puede aplicar el teorema de la variedad local estable de la teoría de sistemas dinámicos, enunciado, por ejemplo, en Irwin (1980). Dicho teorema establece que la dimensión de las sendas que convergen al estado estacionario puede ser determinada linealizando las condiciones de equilibrio en dicho estado estacionario: teniendo en cuenta el número de valores propios estables del sistema linealizado y sustrayendo el número de restricciones impuestas por las condiciones de equilibrio en el primer período sobre los valores iniciales p_1 y p_2, se puede determinar la dimensionalidad del conjunto de equilibrios. Kehoe y Levine (1984, 1985) utilizan esta metodología para demostrar que existen ejemplos genéricos de modelos en que el equilibrio puede adquirir cualquier dimensión entre 0 y n si $m \neq 0$, y cualquier dimensión entre 0 y $n - 1$ si $m = 0$.

El argumento utilizado por Kehoe y Levine, que hace que su resultado tenga un amplio ámbito de aplicación, es que, como Debreu (1974) ha demostrado, las funciones y, z son arbitrarias excepto en lo que respecta a la continuidad, homogeneidad, y la Ley de Walras: para todo y, z que cumplen estas propiedades existe una economía de $2n$ consumidores maximizadores de utilidad que las generan. Sin embargo, la indeterminación no depende de especificaciones inverosímiles. Kehoe y Levine (1986) presentan un ejemplo de un modelo simple con un único bien en cada período y un único consumidor en cada generación que vive tres períodos. Nuestras discusiones previas indican que este modelo está incluido en un modelo de dos bienes en cada período y dos consumidores en cada generación que viven dos períodos. Este modelo posee un conjunto de equilibrios de dimensión unitaria cuando no existe dinero fiduciario, y un conjunto de dimensión dos si se ha introducido dinero fiduciario.

6. **Implicaciones para modelos finitos**

Existe una íntima relación entre modelos con horizonte temporal infinito y modelos con horizonte temporal muy amplio pero finito. Por un lado, los modelos con horizonte temporal infinito son interesantes solamente en la medida en que nos ofrecen un mayor conocimiento de las propiedades de los modelos de horizonte finito. Por otro lado, para aproximar los equilibrios de un modelo de horizonte temporal infinito en una computadora, tendríamos que truncar el modelo después de un número finito de períodos. En esta sección exploramos la relación entre los equilibrios del modelo de generaciones sucesivas y los equilibrios del modelo truncado.

Consideremos un modelo que va desde 1 a T. Con la finalidad de truncar un modelo de horizonte infinito en el período T, introducimos una generación joven terminal análoga a la generación vieja inicial 0. La condición terminal de equilibrio es entonces

$$z(p_{T-1}, p_T) + y_T(p_T) = 0$$

Podemos ver esto como una fijación de las expectativas de lo que serían los precios en el período $T + 1$. Por ejemplo, podríamos determinar y_T por la regla

$$y_T(p_T) = y(p_T, p_T).$$

Alternativamente, podríamos determinar y_T por la regla

$$y_T(p_T) = y(p_T, \|p_T\| \beta p),$$

donde (p, β) es un estado estacionario. Ver Auerbach, Kotlikoff y Skinner (1983), donde se contiene una aplicación de este enfoque.

El modelo posee ahora un número finito de consumidores y un número finito de bienes. Sus equilibrios son óptimos en el sentido de Pareto y el dinero no tiene ningún papel que desempeñar. Además, casi todos los modelos de su clase poseen un número finito de equilibrios localmente únicos. Sin embargo, cualquier equilibrio del modelo de horizonte infinito $(\ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots)$ puede ser convertido en un equilibrio del modelo truncado de los períodos 1 a T, mediante la selección apropiada de las generaciones inicial y final: constrúyanse estas generaciones de tal forma que para el vector de precios de equilibrio poseen los mismos excesos de demanda en los períodos 1 y T que las generaciones correspondientes del modelo de horizonte infinito. El equilibrio resultante puede que requiera una transferencia de la generación vieja inicial a la generación joven terminal, o viceversa. Es esta transferencia la que corresponde al dinero fiduciario en el modelo que va de 1 a ∞. Si este equilibrio en el modelo de horizonte infinito domina en el sentido de Pareto a algún otro equilibrio, entonces, resulta que, sacrificando el bienestar de dos generaciones como mucho, y probablemente sólo se requiera una, este esquema de transferencias permite que todo el mundo mejore. A medida que el horizonte temporal se hace más elevado esta política se hace más atractiva, al menos desde el punto de vista utilitarista.

¿Como se manifiesta la indeterminación del equilibrio, la posible existencia de un continuo de equilibrios, del modelo de horizonte infinito en el modelo truncado? Para responder a esta pregunta consideremos un modelo que se inicia en $t = 1$ y que posee un continuo de equilibrios que convergen al mismo estado estacionario. Cada uno de estos equilibrios puede ser reproducido como un equilibrio del modelo truncado, seleccionando de forma apropiada la generación joven terminal: escójanse dos sendas diferentes de precios en el continuo $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots)$ y $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots)$. Para un T suficientemente elevado tanto $\bar{p}_T$ como $\hat{p}_T$ están muy próximos al vector de precios p del estado estacionario y, por consiguiente, están muy próximos uno del otro. (Podríamos normalizar la sucesión de precios requiriendo que $p_{1T+1} = 1$ en lugar de $p_{11} = 1$.) Seleccionando de forma apropiada la generación joven terminal podemos generar o bien $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_T)$ o $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_T)$ como un equilibrio del modelo truncado. Independientemente de lo grande que sea la diferencia entre $\bar{p}_1$ y $\hat{p}_1$, existe un T lo suficientemente elevado de tal forma que $\bar{p}_T$ y $\hat{p}_T$ están arbitrariamente cercanos. [Ver Kehoe y Levine (1986) donde se contiene un ejemplo con esta clase de comportamiento.] Esta discusión indica que la indeterminación del equilibrio en el modelo de horizonte infinito se manifiesta a la vez en la sensitividad de cómo el modelo es truncado en el modelo finito. Además, esta sensitividad se hace más aguda a medida que se extiende el horizonte temporal del modelo truncado.

7. Modelos más generales

Hasta aquí hemos considerado solamente modelos de generaciones sucesivas de intercambio puro. En esta sección discutimos cómo nuestros resultados

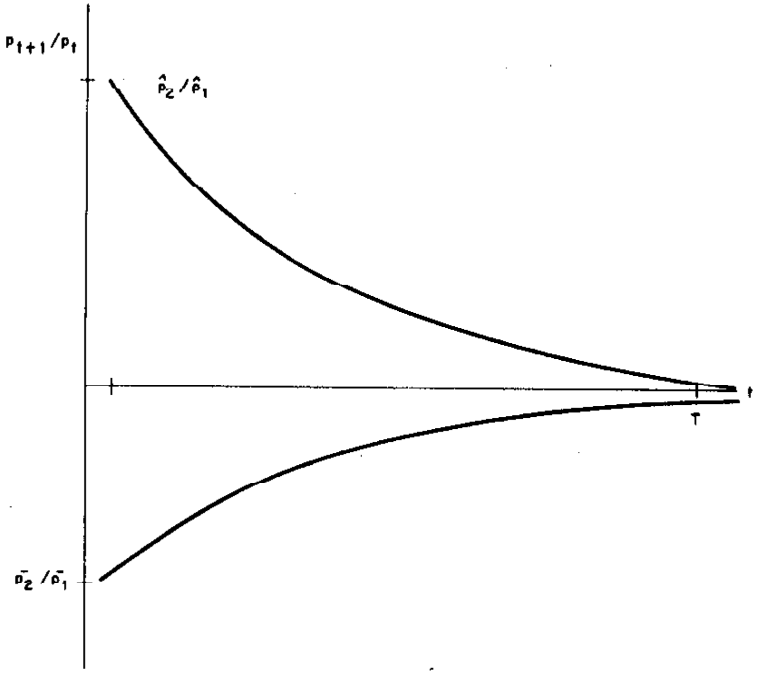

GRAFICO 4

pueden ser extendidos a modelos no estacionarios, modelos con producción y activos, y modelos con estructuras demográficas más generales.

Hemos de puntualizar, en primer lugar, que nuestros resultados se extienden a modelos con una tasa constante de crecimiento de la población. Sea γ el factor mediante el cual la población crece en cada período; $\gamma - 1$ es la tasa de crecimiento. Entonces los excesos de demanda de la generación t son

$$y_t(p_t,\ p_{t+1}) = \gamma^{t-1} y_1(p_t,\ p_{t+1})$$

$$z_t(p_t,\ p_{t+1}) = \gamma^{t-1} z_1(p_t,\ p_{t+1})$$

Existe una sencilla transformación de variables que convierte este modelo en el modelo estacionario:

$$\hat{p}_t = \gamma^{t-1} p_t$$

$$\hat{y}(p_t,\ p_{t+1}) = \gamma\, y_1 (\gamma p_t,\ p_{t+1})$$

$$\hat{z}(p_t,\ p_{t+1}) = z_1(\gamma p_t,\ p_{t+1})$$

Téngase en cuenta que $\hat{y}$, $\hat{z}$ son continuamente diferenciables y homogéneas de grado cero si y_1 y z_1 también lo son. Además, si y_1 y z_1 cumplen la Ley de Walras, entonces $\hat{y}$, $\hat{z}$ también la cumplen:

$$\begin{aligned} 0 &= p_t y_1(p_t, p_{t+1}) + p_{t+1} z_1(p_t, p_{t+1}) \\ &= \gamma^{1-t} \hat{p}_t y_1(\gamma^{1-t}\hat{p}_t, \gamma^{-t}\hat{p}_{t+1}) + \gamma^{-t}\hat{p}_{t+1} z_1(\gamma^{1-t}\hat{p}_t, \gamma^{-t}\hat{p}_{t+1}) \\ &= \hat{p}_t \hat{y}(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) + \hat{p}_{t+1}\hat{z}(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) \end{aligned}$$

Finalmente, nótese que si $(p_1, p_2, \ldots)$ es un equilibrio del modelo original, entonces $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots)$ es un equilibrio del modelo transformado:

$$\begin{aligned} 0 &= z_{t-1}(p_{t-1}, p_t) + y_t(p_t, p_{t+1}) = \\ &= \gamma^{t-2} z_1(\gamma^{2-t}\hat{p}_{t-1}, \gamma^{1-t}\hat{p}_t) + \gamma^{t-1} y_1(\gamma^{1-t}\hat{p}_t, \gamma^{-t}\hat{p}_{t+1}) = \\ &= \hat{z}(\hat{p}_{t-1}, \hat{p}_t) + \hat{y}(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) \end{aligned}$$

Esta transformación tiene obviamente una inversa: si conocemos $\hat{p}_t$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, y el factor de crecimiento γ, podemos recuperar p_t, y_t y z_t. Los estados estacionarios nominales son aquellos en que $\hat{p}_t = \hat{p}_{t+1}$, que es equivalente a $p_t = \gamma p_{t+1}$. Esto implica el resultado de Samuelson de que la tasa de interés en dicho estado estacionario es, en realidad, la tasa de crecimiento de la población.

Formas arbitrarias no estacionarias pueden ser incorporadas en nuestro marco de análisis siempre que el modelo sea estacionario a partir de una generación T dada. En este caso, las condiciones de equilibrio para los primeros $T + 1$ períodos desempeñan el mismo papel que las condiciones de equilibrio del primer período en el modelo estacionario. Genéricamente determinan todos los vectores de precios $p_1, p_2, \ldots, p_{T+1}$, excepto uno. Este vector de precios puede o no ser determinado por la condición de que p_T y p_{T+1} dan lugar a una senda de precios que converge al estado estacionario, considerados éstos como valores iniciales de la ecuación en diferencias correspondiente a las restantes condiciones de equilibrio. El análisis de la indeterminación procede de la misma forma que en la discusión anterior.

Un aspecto restrictivo de nuestro análisis es que hemos analizado sendas de precios que convergen a estados estacionarios. En realidad, sin embargo, nuestro análisis se extiende de modo inmediato a sendas de precios que convergen a cualquier ciclo de duración finita. Se puede ver que, cuando se redefinen las generaciones, los períodos de tiempo, y los bienes para transformar un modelo en que los consumidores viven durante k períodos en uno en el que viven solamente durante dos, los ciclos de período $k - 1$ corresponden a los estados estacionarios. De forma más general, supongamos que un modelo tiene un ciclo de período k, es decir, que $(p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_{t+k}) = \beta(p_{t-k+1}, p_{t-k+2}, \ldots, p_t)$ cumple las condiciones de equilibrio. Supongamos que redefinimos las generaciones, los períodos de tiempo y los bienes, de tal forma que las generaciones 1, 2, ..., k forman ahora la generación 1 y así sucesivamente. El ciclo corresponde ahora a un estado estacionario del modelo redefinido.

La inclusión de activos de horizonte temporal infinito y de consumidores de vida infinita en un esquema de generaciones sucesivas puede eliminar la posibilidad de equilibrios ineficientes y de equilibrios monetarios: supongamos que el consumidor de horizonte temporal infinito posee una dotación de bienes tal que el cociente del valor de su dotación en cada período sobre el valor de la dotación agregada en cada período, está acotado inferiormente, de modo uniforme, a lo largo del tiempo, o supongamos que el activo de duración temporal infinita produce un rendimiento en cada período que está acotado inferiormente de la misma manera. Entonces en equilibrio el valor de la dotación agregada correspondiente a todo el horizonte temporal debe ser finito. En caso contrario, el consumidor de vida infinita disfrutaría de una renta infinita o el activo de perfil temporal infinito tendría un precio infinito. El hecho de que la dotación agregada tenga un valor finito es, como hemos apuntado anteriormente, suficiente para evitar equilibrios ineficientes y equilibrios con dinero difuciario.

Muller y Woodford (1985) han extendido este análisis presentado aquí de modelos estacionarios a modelos que incluyen producción y almacenamiento, consumidores con horizonte temporal infinito y activos de duración infinita. Obtienen que, aunque estas inclusiones evitan la existencia de ineficiencia y de dinero fiduciario, no son suficientes para evitar la indeterminación del equilibrio. En realidad, justamente al igual que en el modelo de generaciones sucesivas, obtienen que la dimensión de la indeterminación puede ser tan grande como el número de bienes en cada período. Sin embargo, identifican ciertas condiciones que dan lugar a la determinación del equilibrio. Kehoe, Levine y Romer (1986) han estudiado modelos con producción y un número finito de consumidores de horizonte temporal ilimitado. Obtienen que los equilibrios de dichos modelos son localmente únicos.

Geanakoplos y Brown (1985) y Santos y Bona (1986) han estudiado modelos de generaciones sucesivas de intercambio puro no estacionarios. En ambos casos, el análisis procede de forma similar al de Kehoe y Levine (1985): linealizan las condiciones de equilibrio alrededor de un equilibrio dado. Obtienen que, al igual que en el modelo estacionario, la dimensión de la indeterminación local puede variar de 0 a n cuando existe dinero fiduciario y de 0 a $n - 1$ cuando no existe. De la misma forma que en el modelo estacionario, existe una restricción inherente en el sentido de que el análisis es local: Kehoe y Levine fijan la atención solamente a equilibrios que convergen a un estado estacionario dado. Estos autores se preocupan solamente de equilibrios que permanecen próximos entre sí, en un sentido bien determinado, en todos los períodos.

Nuestro análisis de ineficiencia, dinero e indeterminación indica que aunque exista una relación entre las posibilidades de ineficiencia y de dinero fiduciario, la indeterminación es un problema aparte. La condición suficiente obvia que imposibilita la ineficiencia, que el valor de la dotación agregada sea finito, también evita la existencia de dinero fiduciario. (Es posible, sin embargo, que exista un equilibrio con dinero fiduciario que sea eficiente en el sentido de Pareto, como hemos visto anteriormente.) La indeterminación, sin embargo, está relacionada con la imposibilidad de reducir las condiciones de equilibrio a un sistema con el mismo número finito de ecuaciones y de incógnitas. Kehoe, Levine, Mas-Colell y Zame (1986) han estudiado el problema de la determinación local del equilibrio en un modelo muy general con un número infinito de consumidores y de bienes. Su modelo es diferente del de generaciones sucesivas en el sentido de que el valor de la dotación agregada es finito. En dicho modelo, por supuesto, todos los equilibrios son eficientes y el dinero no tiene ningún papel que desempeñar. Puesto que las condiciones de equilibrio comprenden aún un número infinito de ecuaciones y de incógnitas, sería esperar demasiado que los equilibrios fuesen localmente únicos. En efecto, obtienen que existen ejemplos robustos de economías con cualquier dimensión de indeterminación del equilibrio.

Referencias

AUERBACH, A. J.; KOTLIKOFF, L. J., y SKINNER, J., «The Efficiency Gains from Dynamic Tax Reform». *International Economic Review*, 24, pp. 81-100, 1983.

BALASKO, Y.; CASS, D., y SHELL, K., «Existence of Competitive Equilibrium in a General Overlapping Generations Model». *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 307-322, 1980.

BALASKO, Y., y SHELL, K., «The Overlapping Generations Model, I: The Case of Pure Exchange without Money», *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 281-306, 1980.

BALASKO, Y., y SHELL, K., «The Overlapping Generations Model. II: The case of Pure Exchange with Money», *Journal of Economic Theory*, 24, pp. 112-142, 1981.

BENHABIB, J., y DAY, R. H., «A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model», *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, pp. 37-55, 1982.

BEWLEY, T., «An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory». *Journal of Mathematical Economics*, 10, pp. 233-267, 1982.

BURKE, J., «Inactive Transfer Policies and Efficiencies in General Overlapping Generations Economies». *Journal of Mathematical Economics*, en prensa, 1986.

DEBREU, G., «Valuation Equilibrium and Parteo Optimum». *Proceedings of the National Academy of Sciencies*, 40, pp. 588-592, 1954.

——, «Economies with a Finite Set of Equilibria». *Econometrica*, 38, pp. 387-392, 1970.

——, «Smooth Preferences». *Econometrica*, 40, pp. 603-612, 1972.

——, «Excess Demand Functions». *Journal of Mathematical Economics*, 1, pp. 15-23, 1974.

DIAMOND, P. A., «National Debt in a Neoclassical Growth Model». *American Economic Review*, 55, pp. 1126-1150, 1965.

DIERKER, E., «Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy». *Econometrica*, 40, pp. 951-953, 1972.

GALE, D., «Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models». *Journal of Economic Theory*, 6, pp. 12-36, 1973.

GEANAKOPLOS, J., y BROWN, D. J., «Comparative Statics and Local Determinacy in OLG Economies: An Application of the Multiplicative Ergodic Theorem». *Cowles Foundation Discussion Paper*, n.° 773, 1985.

IRWIN, M. C., *Smooth Dynamical Systems*. New York: Academic Press, 1980.

KAREKEN, J. H., y WALLACE, N., «On the Indeterminacy of Equilibrium Exchange Rates». *Quarterly Journal of Economics*, 96, pp. 207-222, 1981.

KEHOE, T. J., «Multiplicity of Equilibrium and Comparative Statics». *Quarterly Journal of Economics*, 11, pp. 119-147, 1985.

KEHOE, T. J., y LEVINE, D. K., «Regularity in Overlapping Generations Exchange Economies». *Journal of Mathematical Economics*, 13, pp. 69-93, 1984.

KEHOE, T. J., y LEVINE, D. K., «Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Models». *Econometrica*, 53, pp. 433-453, 1985.

KEHOE, T. J., y LEVINE, D. K., «An Example of Indeterminacy in an Overlapping Generations Model», artículo no publicado, 1986.

KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K.; MAS-COLELL, A., y WOODFORD, M., «Gross Substitutability in Large-Square Economies», artículo no publicado, 1986.

KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K.; MAS-COLELL, A., y ZAME, W. R., «Determinacy of Equilibrium in Large-Square Economies». Artículo no publicado, 1986.

KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K., y ROMER, P. M., «Smooth Valuation Functions and Determinacy in Economies with Infinitely Lived Consumers», artículo no publicado, 1986.

LUCAS, R. E., «Expectations and the Neutrality of Money». *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 103-124, 1972.

MAS-COLELL, A., «Continuous and Smooth Consumers: Approximation Theorems». *Journal of Economic Theory*, 8, pp. 305-336, 1974.

MAS-COLELL, A., *The Theory of Economic Equilibrium: A Differentiable Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

MULLER, W. J., y WOODFORD, M., «Determinacy of Equilibrium in Stationary Economies with Both Finite and Infinite Lived Consumers», artículo no publicado, 1985.

NEGISHI, T., «Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy». *Metroeconomica*, 12, pp. 92-97, 1960.

SAMUELSON, P. A., «An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money». *Journal of Political Economy*, 6, pp. 467-482, 1958.

SANTOS, M. S. y BONA, J. L., «On the Structure of the Equilibrium Price Set of Overlapping Generations Economies», artículo no publicado, 1986.