Modelos dinámicos de equilibrio general

Timothy J. Kehoe *

Clare College, Cambridge

1. Introducción

En este artículo exploraremos propiedades de dos modelos dinámicos simples de equilibrio general, un modelo con un número finito de consumidores con horizonte temporal infinito y un modelo de generaciones sucesivas con un número infinito de consumidores de vida finita. Ambos modelos contienen un conjunto completo de mercados. La formulación Arrow-Debreu del modelo de equilibrio walrasiano puede, por supuesto, ser dada una interpretación dinámica, donde los bienes son indexados por fechas. Los modelos que estudiamos se diferencian de la formulación estándar del modelo Arrow-Debreu solamente en que permitiremos un número infinito de bienes. Como veremos, los modelos con un número infinito de bienes pueden poseer propiedades muy diferentes a los modelos con un número finito de bienes. Dichos modelos infinitos se interpretan mejor como idealizaciones: sus propiedades son interesantes en la medida en que nos ayudan a comprender modelos con un número elevado, pero finito, de bienes.

El modelo con número finito de consumidores de vida infinita comparte tres propiedades importantes con la formulación básica del modelo Arrow-Debreu. En primer lugar, todos los equilibrios son eficientes en el sentido de Pareto; en segundo lugar, el dinero fiduciario, la deuda nominal sin respaldo, no juega ningún papel, y, en tercer lugar, existen, en general, un número finito de equilibrios localmente únicos. Por el contrario, el modelo de generaciones sucesivas puede violar cada una de estas tres propiedades: puede tener equilibrios que no son eficientes en el sentido de Pareto, puede también tener equilibrios en que el dinero fiduciario juega un importante papel, y asimismo puede contener un continuo de equilibrios de forma genérica. Veremos que existe una relación muy fuerte entre la posibilidad de ineficiencia del equilibrio y el papel a desempeñar por el dinero fiduciario. La posibilidad de indeterminación del equilibrio es, sin embargo, un problema relativamente separado, excepto en modelos en que los consumidores viven solamente dos períodos y existe un bien en cada período.

Los modelos dinámicos de equilibrio general están siendo cada vez más importantes en teoría económica, particularmente en macroeconomía. La tendencia ha sido la de usar modelos pequeños para analizar problemas macroeconómicos. Véase, por ejemplo, Lucas (1981) y Kydland y Prescott (1982). Sin embargo, no todos los macroeconomistas se han adherido a esta tendencia general, y el uso explícito de modelos de equilibrio general en macroeconomía

---

* La investigación presentada en este artículo ha sido financiada a través del proyecto SES-8509484 de la National Science Foundation. Mi forma de pensar sobre los temas tratados en este artículo se ha visto fuertemente influenciada por la interacción con otros investigadores que trabajan en esta misma área. En particular, me gustaría dar las gracias a Jonathan Burke, Stephen Burnell, John Geanakoplos, Frank Hahn, Andreu Mas-Colell, Walter Muller, Paul Romer, Michael Woodford, William Zame y, especialmente, a David Levine.

Timothy Kehoe, «Intertemporal General Equilibrium Models», traducción de M. Santos Santos.

ha sido un tema de mucha controversia, en que un lado acusa al otro de usar modelos poco realistas y «ad hoc». Muchos economistas han interpretado esta controversia como un debate ideológico entre monetaristas y keynesianos. Sin embargo, esta interpretación es probablemente poco afortunada. Un modelo explícito de equilibrio general impone una disciplina y asegura la consistencia interna. Esto nos hace más fácil organizar nuestra forma de pensar sobre los fenómenos económicos y comunicársela a los demás, principalmente porque los supuestos de modelo tienen implicaciones fáciles de comprender en dicha formulación. La frase «ad hoc» ha sido muy frecuentemente mal usada en economía. Ha llegado a ser un sinónimo de «tuyo» y «malo» y un antónimo de «mío» y «bueno». La mayoría de los buenos modelos económicos son «ad hoc» en el sentido estricto de que han sido diseñados para un propósito particular, y que producen resultados que están íntimamente ligados a un conjunto específico de supuestos. La ventaja de usar explícitamente modelos de equilibrio general es que proveen un marco en que conjuntos de supuestos pueden ser fácilmente comprendidos y comparados.

La desventaja potencial es, por supuesto, que el marco de equilibrio general puede llegar a ser un mero ejercicio intelectual que, dados unos supuestos, se centra en el desarrollo analítico del modelo, ignorando otros aspectos de la compleja realidad económica. Afortunadamente, sin embargo, esta formulación es lo suficientemente rica para permitir una amplia variedad de resultados. Para ilustrar esto empleamos nuestros dos modelos para ofrecer una respuesta a la cuestión planteada por Barro (1974) de si los bonos del Estado son riqueza neta. Por supuesto, modelos diferentes pueden producir respuestas diferentes a esta cuestión. Sin embargo, existe una relación íntima entre estas respuestas y el conjunto de supuestos que caracterizan a estos modelos.

Los modelos que estudiaremos en este artículo son de intercambio puro, sin producción y almacenamiento. El tiempo es discreto y no existe incertidumbre. Además, ambos modelos son estacionarios, en el sentido de que la estructura de las preferencias y dotaciones es constante a lo largo del tiempo. Estos modelos son los más fáciles de analizar. Indicaremos, sin embargo, cómo nuestros resultados se extienden a modelos más complicados. También compararemos la estructura de ambos modelos: por una parte, el modelo de generaciones sucesivas posee propiedades similares al modelo con un número finito de consumidores de vida infinita, que se enfrentan a restricciones de préstamo y ahorro. Por otra parte, el modelo con un número finito de consumidores de vida infinita posee propiedades similares a un modelo de generaciones sucesivas en que los padres dejan herencias a sus hijos.

2. Un modelo de consumidores de vida infinita

Empezamos analizando una economía con un número finito de agentes que consumen a lo largo de un número infinito de períodos. Existen n bienes en cada período, que no pueden ser almacenados, y hay h consumidores. El consumidor j se caracteriza por una función de utilidad

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta_j^{t-1} u_j(c_{1t}^j, \ldots, c_{nt}^j) \qquad [2.1]$$

y un vector de dotaciones $w^j = (w_1^j, \ldots, w_n^j)$, al que él tiene derecho en cada período. Aquí el factor de descuento β_j satisface $1 > \beta_j > 0$; la función de utilidad momentánea u_j es dos veces continuamente diferenciable para todos los vectores de consumo positivos, estrictamente cóncava, y monótona creciente, y el vector de dotaciones w^j es estrictamente positivo.

Existen dos interpretaciones de este modelo, la primera es la interpretación tradicional walrasiana, en que todos los intercambios, incluyendo aquellos que conllevan una entrega futura de bienes, tienen lugar en el primer período. En esta interpretación el tiempo no juega ningún papel específico, y se puede considerar t meramente como otro índice sobre las mercancías. La restricción presupuestaria del consumidor es

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^j \leqslant \sum_{t=1}^{\infty} p_t w^j \qquad [2.2]$$

Aquí, $p_t = (p_{1t}, \ldots, p_{nt})$ es el vector de precios futuros en el período t y $p_t c_t^j$ es el producto interno

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it} c_{it}^j$$

Bajo la segunda interpretación, el intercambio tiene lugar a lo largo del tiempo, pero existen mercados de capital perfectos y expectativas racionales. En este modelo simple, el supuesto de mercados de capital perfectos quiere decir solamente que los consumidores pueden prestar y pedir prestado lo que deseen, a una tasa de interés determinada de forma competitiva, y el supuesto de expectativas racionales quiere decir que los consumidores poseen previsión perfecta del futuro. Sea

$$q_t = (q_{1t}, \ldots, q_{nt})$$

el vector de precios al contado en el período t; sea r_t la tasa de interés entre t y $t + 1$, y sea m_t^j el préstamo neto efectuado por el consumidor j entre t y $t + 1$. Podemos interpretar m_t^j como dinero interno. El consumidor j se enfrenta a la sucesión de restricciones presupuestarias

$$\begin{aligned}
q_1 c_1^j + m_1^j &\leqslant q_1 w^j \\
q_2 c_2^j + m_2^j &\leqslant q_2 w^j + (1 + r_1) m_1^j \\
&\vdots \\
q_t c_t^j + m_t^j &\leqslant q_t w^t + (1 + r_{t-1}) m_{t-1}^j \\
&\vdots
\end{aligned} \qquad [2.3]$$

Diviendo la restricción presupuestaria en el período t por

$$(1 + r_1)(1 + r_2) \ldots (1 + r_{t-1}),\ t = 1, 2, \ldots, T$$

y agregando obtenemos

$$\textstyle\sum_{t=1}^{T} p_t c_t^j + m_T^j/(1 + r_1)(1 + r_2) \ldots (1 + r_{t-1}) \leqslant \sum_{t=1}^{T} p_t w^j \qquad [2.4]$$

donde $p_t = q_t/(1 + r_1)\ (1 + r_2)\ \ldots\ (1 + r_{t-1})$. En el límite esto produce la misma restricción presupuestaria que en la primera interpretación siempre y cuando

$$\lim_{T\to\infty} m_T^j/(1 + r_1)\ (1 + r_2)\ \ldots\ (1 + r_{T-1}) = 0 \qquad [2.5]$$

Discutimos más abajo que éste debe ser ciertamente el caso en equilibrio.

Regresamos a la primera interpretación del modelo. Un equilibrio es una sucesión de precios $(p'_1, p'_2, \ldots)$ y una sucesión de vectores de consumo $(c'^j_1, c'^j_2, \ldots)$ para cada consumidor, $j = 1, \ldots, h$, tal que cada consumidor maximiza la utilidad sujeto a su restricción presupuestaria [2.2], y la demanda es igual a la oferta.

$$\sum^h_{j=1} c'^j_t = \sum^h_{j=1} w^j,\ t = 1, 2, \ldots \qquad [2.6]$$

Obsérvese que todo equilibrio debe ser tal que $\sum^\infty_{t=1} p_t w^j$ converge. De otro modo, el consumidor poseería una renta infinita y su problema de maximización de utilidad no tendría solución. Debido a que u_t es monótona creciente, le gustaría consumir cantidades infinitas de al menos un bien, lo que haría imposible el equilibrio.

Puesto que todo consumidor posee una renta finita, el valor de la dotación agregada debe ser también finito:

$$\sum^\infty_{t=1} p'_t\left(\sum^h_{j=1} w^j\right) = \sum^h_{j=1}\left(\sum^\infty_{t=1} p'_t w^j\right). \qquad [2.7]$$

Esto implica que cualquier equilibrio debe ser eficiente en el sentido de Pareto. Este resultado se debe a Debreu (1954). Supongamos, por el contrario, que existe un plan de asignaciones, superior en el sentido de Pareto $(c^j_1, c^j_2, \ldots)$,

$$\sum^\infty_{t=1} \beta_j^{t-1} u_j(c^j_t) \geqslant \sum^\infty_{t=1} \beta_j^{t-1} u_j(c'^j_t)\ j = 1, \ldots, h, \qquad [2.8]$$

con desigualdad estricta para algún j, que sea factible,

$$\sum^h_{j=1} c^j_t \leqslant \sum^h_{j=1} w^j_t,\ t = 1, 2, \ldots \qquad [2.9]$$

Entonces la sucesión de consumos $(c^j_1, c^j_2, \ldots)$ debe costar al menos tanto como la renta del consumidor, y estrictamente más para algún consumidor. De otro modo, $(c^j_1, c^j_2, \ldots)$ no maximizaría utilidad. Por consiguiente,

$$\sum^h_{j=1}\left(\sum^\infty_{t=1} p'_t c^j_t\right) > \sum^h_{j=1}\left(\sum^\infty_{t=1} p'_t w^j_t\right) = \sum^\infty_{t=1} p'_t\left(\sum^h_{j=1} w^j\right). \qquad [2.10]$$

Puesto que la asignación Pareto-superior es, sin embargo, factible,

$$\sum^h_{j=1}\left(\sum^\infty_{t=1} p_t c^j\right) = \sum^\infty_{t=1} p'_t\ \left(\sum^h_{j=1} c^j_t\right) \leqslant \sum^\infty_{t=1} p'_t\left(\sum^h_{j=1} c'^j_t\right). \qquad [2.11]$$

Esta contradicción establece que no puede haber una asignación que sea Pareto-superior a la asignación competitiva y que además sea factible.

El que el valor de la dotación agregada sea factible implica también que no puede existir ningún equilibrio con dinero fiduciario, deuda sin respaldo. Supongamos, por el contrario, que existe una asignación que sea factible en que cada consumidor satisface la restricción presupuestaria.

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t' c_t^j = \sum_{t=1}^{\infty} p_t' w^j + m^j,\ j = 1, \ldots, h, \qquad [2.12]$$

donde

$$m = \sum_{j=1}^{h} m^j \neq 0. \qquad [2.13]$$

(Si $m = 0$ pero $m^j \neq 0$, esto es simplemente un equilibrio con transferencias.) Aquí m es el volumen de dinero externo, o fiduciario, que permitiremos que sea positivo o negativo. Agregando estas restricciones presupuestarias sobre los consumidores, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{h} \left(\sum_{t=1}^{\infty} p_t' c_t^j\right) = \\ = \sum_{j=1}^{h}\left(\sum_{t=1}^{\infty} p_t' w^j\right) + m. \qquad [2.14]$$

Sin embargo, multiplicando las condiciones [2.6] por los precios y agregando, obtenemos

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t'\left(\sum_{j=1}^{h} c_t^j\right) = \sum_{t=1}^{\infty} p_t'\left(\sum_{j=1}^{h} w^j\right). \qquad [2.15]$$

Por consiguiente, $m = 0$, lo que contradice el supuesto de que existe un equilibrio con dinero fiduciario.

Este mismo argumento puede ser usado para demostrar que la sucesión de restricciones presupuestarias [2.3] es equivalente a la única restricción intertemporal [2.2]: para que el consumidor j tenga un problema de maximización bien definido, y para que el concepto de equilibrio tenga sentido, el límite en [2.5] tendría que existir. Aquí, y en contraste con el caso de dinero fiduciario que hemos examinado, las variables m_t^j son seleccionadas por los consumidores. Puesto que la utilidad es monótona creciente, cada consumidor desearía seleccionar $(m_1^j, m_2^j, \ldots)$ de tal forma que el límite en [2.5] sea negativo. El mismo argumento que excluye un equilibrio con dinero externo también excluye esta posibilidad.

En general, este modelo tiene un número finito de equilibrios localmente únicos. Para ver esto, transformaremos las condiciones de equilibrio usando un enfoque desarrollado por Negishi (1960) y que fue aplicado por primera vez a los modelos dinámicos por Bewley (1982). Para simplificar la exposición, ignoraremos la posibilidad de soluciones esquina en el problema de maximización de utilidad del consumidor. Esto puede justificarse mediante la imposición de una restricción adicional sobre u_j (véase Kehoe y Levine, 1985a). La solución del problema de maximización de utilidad del consumidor viene caracterizada por las condiciones

$$\beta^{t-1} Du_j(c_t^j) = \lambda_j p_t, \qquad [2.16]$$

para algún multiplicador de Lagrange $\lambda_j > 0$, y las restricciones presupuestarias [2.2].

(Aquí, $Du_j(c_t^j)$ es el vector $1 \times n$ de derivadas parciales de u_j.) Un equilibrio viene caracterizado, por tanto, por [2.2] y [2.16], que son las condiciones de maximización de utilidad, y [2.6], que son las condiciones de vaciamiento de los mercados, que en cada período la demanda sea igual a la oferta. Este es un sistema con un número infinito de ecuaciones e incógnitas.

Consideremos ahora el problema de optimalidad, de maximización de una suma ponderada de funciones de utilidad individual sujeto a las condiciones de factibilidad:

$$\text{maximizar } \sum_{j=1}^{h} \alpha_j \sum_{t=1}^{\infty} \beta_j^{t-1} u_j(c_t^j) \qquad [2.17]$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=1}^{h} c_t^j = \sum_{j=1}^{h} w^j,\ t = 1,\ 2,\ \ldots$$

Donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ son ponderaciones positivas de utilidad. Toda solución de este problema viene caracterizada por las condiciones

$$\alpha_j \beta_j^{t-1} Du_j(c_t^j) = \pi_t,\ j = 1,\ \ldots,\ h,\ t = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad [2.18]$$

Para alguna sucesión de vectores de multiplicadores de Lagrange $\pi_t = (\pi_{1t}, \ldots, \pi_{nt}) > 0$, y las condiciones de factibilidad [2.6]. Obsérvese que, si dividimos [2.18] por α_j, entonces resulta ser igual a [2.16]. Esto es una forma alternativa de ver que cualquier equilibrio competitivo es eficiente en el sentido de Pareto, que el Primer Teorema de la Economía del Bienestar se cumple.

El Segundo Teorema se cumple también: cualquier solución del problema de la optimalidad [2.17] satisface todas las condiciones para un equilibrio competitivo, excepto las restricciones presupuestarias individuales [2.2]. Dicha solución puede, por tanto, ser considerada como un equilibrio competitivo con transferencias. Los precios competitivos son, por supuesto, los multiplicadores de Lagrange π_t. Podemos calcular las transferencias para implementar como equilibrio competitivo la asignación eficiente asociada con las ponderaciones $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ mediante la expresión

$$t_j(\alpha) = \sum_{t=1}^{\infty} \pi_t(\alpha)(c_t^j(\alpha) - w^j),\ j = 1,\ \ldots,\ h. \qquad [2.19]$$

Haciendo estos pagos de transferencias igual a 0 se obtiene una caracterización del equilibrio por medio de un número finito de ecuaciones e incógnitas.

Usando la concavidad estricta de u_j, se puede demostrar que las funciones de transferencias t_j son continuas. t_j es también homogénea de grado uno en α porque π_t es homogénea de grado uno y c_t^j es homogénea de grado cero. Si doblamos , por ejemplo, la sucesión de vectores de consumo que solucionan el problema no cambia, pero los multiplicadores de Lagrange se incrementan el doble. Además, las funciones de transferencias satisfacen

$$\sum_{j=1}^{h} t_j(\alpha) \equiv 0 \qquad [2.20]$$

porque cualquier solución al problema de optimalidad satisface las restricciones de factibilidad.

Las condiciones que caracterizan los equilibrios de este modelo son formalmente equivalentes a las que caracterizan los equilibrios de un modelo estático de intercambio puro con h bienes. En efecto, las funciones

$$f_j(\alpha) = -t_j(\alpha)/\alpha_j$$

tienen todas las propiedades de las funciones del exceso de demanda de un modelo de intercambio puro: son continuas, son homogéneas de grado cero y obedecen la ley de Walras

$$\sum_{j=1}^{h} \alpha_j f_j(\alpha) \equiv 0$$

Debreu (1970) ha demostrado que si las funciones de exceso de demanda f_j son continuamente diferenciables, entonces casi todas las economías poseen un número finito de equilibrios localmente únicos. La expresión «casi todas» corresponde, por supuesto, a un término matemático preciso. Podemos usar o bien las funciones de transferencias t_j o las funciones de demanda f_j para caracterizar los equilibrios del modelo dinámico que estamos considerando. Kehoe y Levine (1985a) han demostrado que el razonamiento de Debreu se extiende a este modelo. Además, imponiendo una condición adicional, relativamente débil, demuestran que t_j es, en efecto, continuamente diferenciable.

La prueba del resultado de Debreu está basada en una maquinaria matemática bastante compleja. Sin embargo, la intuición existente detrás de esto es muy simple. En realidad es la misma intuición que Walras tuvo cuando contó las ecuaciones y las incógnitas. Existen h ecuaciones, $t_j(\alpha) = 0$, con h incógnitas, α_j. Debido a la homogeneidad, una de las ponderaciones α_j es redundante. Debido a la restricción de agregación [2.20], sin embargo, una de las ecuaciones es también redundante. Por consiguiente, las condiciones de equilibrio pueden ser consideradas como un sistema de $h - 1$ ecuaciones con $h - 1$ incógnitas. Supongamos que estas ecuaciones son independientes en el sentido de que $t_j(\hat{\alpha}) = 0$, $j = 1, \ldots, h - 1$, y que la matriz $(h - 1) \times (h - 1)$ de derivadas parciales

$$J = \begin{bmatrix} \partial t_1/\partial \alpha_1 \,(\hat{\alpha}) & \ldots & \partial t_1/\partial \alpha_{h-1} \,(\hat{\alpha}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial t_{h-1}/\partial \alpha_1 \,(\hat{\alpha}) & \ldots & \partial t_{h-1}/\partial \alpha_{h-1} \,(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \qquad [2.21]$$

no es singular. (Hemos impuesto la normalización $\alpha_h = 1$ y quitado la ecuación $t_h(\alpha) = 0$.) Entonces el teorema de la función inversa del cálculo elemental dice que, en un entorno abierto, $\hat{\alpha}$ es la única solución a las condiciones de equilibrio; es decir, $t^{-1}(0) = \hat{\alpha}$. Usando las condiciones de compacticidad del conjunto de posibles equilibrios y la continuidad de las condiciones de equilibrio, podemos probar fácilmente que existe un número finito de equilibrios si el determinante de J es distinto de cero en todo equilibrio.

Si J es singular en algún equilibrio, entonces nuestra intuición nos dice que la mínima perturbación en las funciones t_j hace que sea no singular o que sea imposible que exista una solución cerca de $\hat{\alpha}$. El gráfico 1 nos ilustra algunas posibilidades en una economía con dos consumidores.

Para ser más concreto con algunos de los conceptos que hemos estado discutiendo en esta sección consideremos modelo simple con un bien en cada período y dos consumidores. Supongamos que

$$u_1(c_t) = u_2(c_t) = \log c_t$$

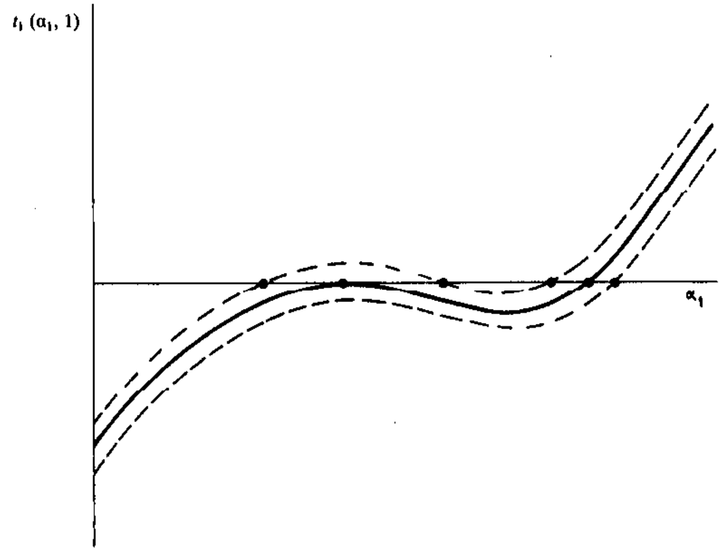

GRAFICO 1

y que $w^1 = w^2 = 1$. La única diferencia entre estos dos consumidores es que $\beta_1 < \beta_2$. Toda solución del problema de maximización de utilidad viene caracterizado por las condiciones

$$\beta_j^{t-1}/c_t^j = \lambda_j p_t \qquad [2.22]$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^j = \sum_{t=1}^{\infty} p_t \qquad [2.23]$$

Un equilibrio satisface estas condiciones y la condición de que la demanda sea igual a la oferta

$$c^1 + c^2 = 2, \qquad t = 1, 2, \ldots \qquad [2.24]$$

El problema de optimalidad es

$$\text{máx}\ \alpha_1 \sum_{t=1}^{\infty} \beta_1^{t-1} \log c_t^1 + \alpha_2 \sum_{t=1}^{\infty} \beta_2^{t-1} \log c_t^2 \qquad [2.25]$$

sujeto a

$$c_t^1 + c_t^2 = 2, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Una solución de este problema viene caracterizada por las condiciones

$$\alpha_j \beta_j^{t-1}/c_t^j = \pi_t, \qquad j = 1, 2, \qquad [2.26]$$

y [2.24]. Estas ecuaciones pueden ser fácilmente calculadas, obteniéndose

$$c_t^j = 2\alpha_j \beta_j^{t-1}/(\alpha_1 \beta_1^{t-1} + \alpha_2 \beta_2^{t-1}), \qquad j = 1,\ 2, \tag{2.27}$$

$$\pi_t = (\alpha_1 \beta_1^{t-1} + \alpha_2 \beta_2^{t-1})/2 \tag{2.28}$$

Las transferencias necesarias para implementar como equilibrio competitivo la asignación asociada con las ponderaciones α_1 y α_2 son, por tanto

$$\begin{aligned} t_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{t=1}^{\infty} \pi_t(c_t^1 - 1) = \alpha_1/(1 - \beta_1) - \alpha_2/(1 - \beta_2) \\ t_2(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{t=1}^{\infty} \pi_t(c_t^1 - 1) = \alpha_2/(1 - \beta_2) - \alpha_1/(1 - \beta_1) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Nótese que estas funciones son continuamente diferenciables, homogéneas de grado uno, y su suma es igual a cero.

El único equilibrio de este modelo se encuentra haciendo estas transferencias igual a 0. Este equilibrio es

$$\alpha_1 = (1 - \beta_1)/(1 - \beta_2),\ \alpha_2 = 1$$

Obsérvese que el valor de la dotación agregada es finita, puesto que

$$\sum_{t=1}^{\infty} \pi_t(1 + 1) = 2 \sum_{t=1}^{\infty} [(1 - \beta_1/1 - \beta_2)\beta_1^{t-1} + \beta_2^{t-1}]/2 = 2/1 - \beta_2 \tag{2.30}$$

No existe, por supuesto, dinero fiduciario en este modelo. Existe, sin embargo, dinero interno: el consumidor 1, que es más impaciente que el consumidor 2, gasta más de su dotación al principio de su vida. Más tarde consume menos, pagando así su deuda. Asintóticamente su consumo en cada período es igual a 0, y el consumo del consumidor 2 es igual a 2.

3. Un modelo de generaciones sucesivas

En esta sección consideramos un modelo sencillo de generaciones sucesivas en el que existe un único bien en cada período y un único consumidor, que vive dos períodos, en cada generación. Este es el modelo desarrollado originalmente por Samuelson (1958) y analizado extensamente por Gale (1973). En la sección siguiente trataremos modelos más generales.

El consumidor nacido en el período t, $t = 1, 2, \ldots,$ trata de solucionar el problema de maximización de utilidad

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } u(c_t^t, c_{t+1}^t) \\ &\text{sujeto a } p_t c_t^t + p_{t+1} c_{t+1}^t = p_t w_1 + p_{t+1} w_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Haremos la misma clase de supuestos sobre u y (w_1, w_2) de la sección anterior. Como en el modelo previo podemos pensar que este consumidor se enfrenta a dos restricciones presupuestarias,

$$q_t^t c_t + m^t = q_t w_1$$
$$q_{t+1} c_{t+1}^t = q_{t+1} w_2 + (1 + r_t) m^t. \qquad [3.2]$$

Normalizamos los precios al contado de tal forma que $q_{t+1} = q_t = 1$. Dividiendo la segunda restricción por $(1 + r_t)$, y añadiendo ambas conjuntamente, obtenemos una restricción presupuestaria en la que $p_t/p_{t+1} = (1 + r_t)$.

La solución a este problema viene caracterizada por las condiciones

$$\partial u/\partial c_t^t(c_t^t,\ c_{t+1}^t) = \lambda_t p_t$$
$$\partial u/\partial c_{t+1}^t(c_t^t,\ c_{t+1}^t) = \lambda_t p_{t+1} \qquad [3.3]$$

y la restricción presupuestaria en [3.1]. Dada la concavidad estricta de u, este consumidor posee funciones de exceso de demanda continuas $y(p_t,\ p_{t+1}) = c_t^t - w_1$ para el período de joven y $z(p_t,\ p_{t+1}) = c_{t+1}^t - w_2$ cuando es viejo. La forma de la restricción presupuestaria implica que estas funciones son homogéneas de grado cero en $(p_t,\ p_{t+1})$ y cumplen la ley de Walras

$$p_t y(p_t,\ p_{t+1}) + p_{t+1}\, z\,(p_t,\ p_{t+1}) = 0. \qquad [3.4]$$

Consideremos, por ejemplo, el caso en que $u(c_t^t,\ c_{t+1}^t) = \log c_t^t + \beta \log c_{t+1}^t$. Las funciones de exceso de demanda pueden ser fácilmente calculadas usando [3.1] y [3.3]. Estas son

$$y(p_t,\ p_{t+1}) = (p_t w_1 + p_{t+1} w_2)/(1 + \beta)\, p_t - w_1 =$$
$$= (-\beta p_t w_1 + p_{t+1} w_2)/(1 + \beta) p_t$$
$$z(p_t,\ p_{t+1}) = \beta(p_t w_1 + p_{t+1} w_2)/(1 + \beta) p_{t+1} - w_2 = \qquad [3.5]$$
$$= (\beta\, p_t w_1 - p_{t+1} w_2)/(1 + \beta) p_{t+1}.$$

Observe que estas funciones, en efecto, satisfacen la continuidad, homogeneidad y la ley de Walras.

Además de los consumidores nacidos en los períodos 1, 2, ..., existe un consumidor que vive solamente en el período 1 y que soluciona el problema

$$\text{maximizar } u_0(c_1^0)$$
$$\text{sujeto a } p_1 c_1^0 = p_1 w_2^0 + m. \qquad [3.6]$$

En este caso m, que puede ser positivo, negativo o cero, es el volumen de dinero fiduciario poseído por la generación cero. Puesto que este consumidor tiene preferencias y dotaciones por el primer bien solamente, no necesitamos especificar con cuidado las propiedades de u_0 o w_2. En efecto, bajo la monotonía creciente de u_0, la función de exceso de demanda es siempre

$$z_0(p_1,\ m) = m/p_1. \qquad [3.7]$$

Un equilibrio de este modelo es una cantidad de dinero fiduciario $\hat{m}$ y una sucesión de precios $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots)$ que hacen que las funciones de exceso de demanda sean iguales a cero en cada período,

$$z_0(\hat{p}_1, \hat{m}) + y(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = 0 \qquad [3.8]$$

en el período 1 y

$$z(\hat{p}_{t-1}, \hat{p}_t) + y(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) = 0 \qquad [3.9]$$

en el período t, $t = 2, 3, \ldots$

Una forma de calcular los equilibrios de este modelo, desarrollada por Gale (1973) y Cass, Okuno y Zilcha (1979) es usando la curva de transacciones (neta), la imagen de $(y(p_t, p_{t+1}), z(p_t, p_{t+1}))$. Esta curva pasa por el origen, está siempre en los cuadrantes segundo y cuarto, e intersecta solamente una vez todo segmento que pasa por el origen (exceptuando, por supuesto, el propio origen). En realidad, la ley de Walras [3.4] establece que

$$z(p_t, p_{t+1})/y(p_t, p_{t+1}) = -p_t/p_{t+1} \qquad [3.10]$$

esto es, el punto donde intersecta la recta con pendiente $-p_t/p_{t+1}$ tiene como coordenadas los excesos de demanda dados por $(p_t, \bar{p}_{t+1})$. Además, la curva de oferta satisface siempre $y > -w_1$ y $z > -w_2$.

Por ejemplo, en nuestro caso lineal-logarítmico, podemos usar la fórmula de $y(p_t, p_{t+1})$ en [3.5] para calcular p_t/p_{t+1} en términos de y, sustituyendo este último resultado en la fórmula de $z(p_t, p_{t+1})$ para obtener la curva de transacciones.

$$z = \beta w_1 w_2/((1+\beta)^2 y + (1+\beta)\beta w_1) - w_2/1 + \beta \qquad [3.11]$$

Este resultado se ilustra en el gráfico 2.

En general, existen dos estados estacionarios, tal que dado el factor de inflación $\sigma > 0$ la sucesión de precios $p_t = \sigma^t$ satisface

$$\begin{aligned} &z(\sigma^{t-1}, \sigma^t) + y(\sigma^t, \sigma^{t+1}) = \\ &= z(1,\sigma) + y(1,\sigma) = 0. \end{aligned} \qquad [3.12]$$

Estos dos estados estacionarios vienen dados por las intersecciones de la curva de transacciones con la línea que pasa por el origen con pendiente -1, $z = -y$. Existe un único estado estacionario en el caso particular en que la pendiente de la curva de transacciones es -1 en el origen.

El estado estacionario en que $\sigma = 1$ domina en el sentido de Pareto el estado estacionario del origen. Una forma de ver esto es comprobando que la solución del plan de consumo del problema de maximización del consumidor representativo cuando $p_t = p_{t+1}$ también soluciona el problema de maximización de utilidad de un plan de consumo en un estado estacionario:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } u(c_1, c_2) \\ &\text{sujeto a } c_1 + c_2 = w_1 + w_2. \end{aligned} \qquad [3.13]$$

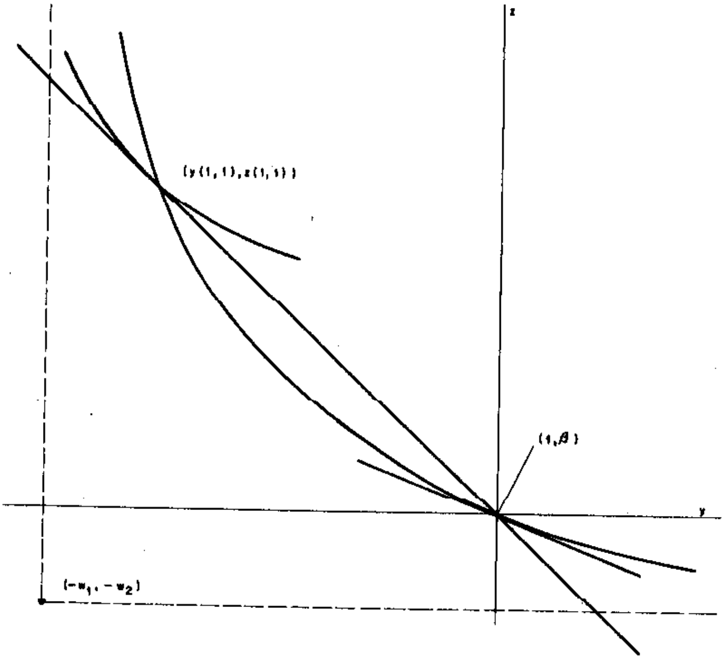

GRAFICO 2

Por otro lado, nótese que dado que la posición de no intercambio es siempre factible, el consumidor puede solamente estar mejor si desea comerciar. En efecto, mediante un argumento simple de revelación de las preferencias se puede ver que el consumidor prefiere el intercambio neto $(y(1, 1), z(1, 1))$ a cualquier punto a la izquierda de la línea con pendiente -1. (Véase de nuevo el gráfico 2).

Para calcular los equilibrios, además de los dos estados estacionarios, empezamos con $\hat{z}_0 = \hat{m}/\hat{p}_1$ y nos vamos horizontalmente a la línea con pendiente -1 para encontrar el valor de y para el cual, $y(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = -z_0$. Entonces nos movemos verticalmente hacia la curva de transacciones para encontrar el punto $(y(\hat{p}_1, \hat{p}_2), z(\hat{p}_1, \hat{p}_2))$. Ahora continuamos horizontalmente hacia la línea con pendiente -1 para encontrar el valor de y para cual cual $y(\hat{p}_2, \hat{p}_3) = -z(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$. Este proceso se ilustra en el gráfico 3.

La curva de transacciones en el gráfico 3 corresponde al caso en que $\beta w_1 > w_2$. Observe que para cualquier valor de z_0 tal que $z_0 = \hat{m}/\hat{p}_1 < z(1, 1)$ existe un equilibrio que converge al estado estacionario autárquico, en el que no existe intercambio. [Existe una cota inferior natural sobre $\hat{m}/\hat{p}_1$ dada por $-w^0$, que es independiente de la curva de transacciones de (y, z).] La sucesión de precios se calcula normalizando $\hat{p}_1 = 1$, usando entonces la pendiente de la línea que cruza el origen e intersecta la curva de transacciones en $[y(\hat{p}_1, \hat{p}_2), z(\hat{p}_1, \hat{p}_2)]$ para encontrar p_2, usando entonces la pendiente de la línea que cruza el origen e intersecta la curva de transacciones en $[y(\hat{p}_2, \hat{p}_3), z(\hat{p}_2, \hat{p}_3)]$ para encontrar $\hat{p}_3$, y así sucesivamente. Observe que todo equilibrio de este modelo,

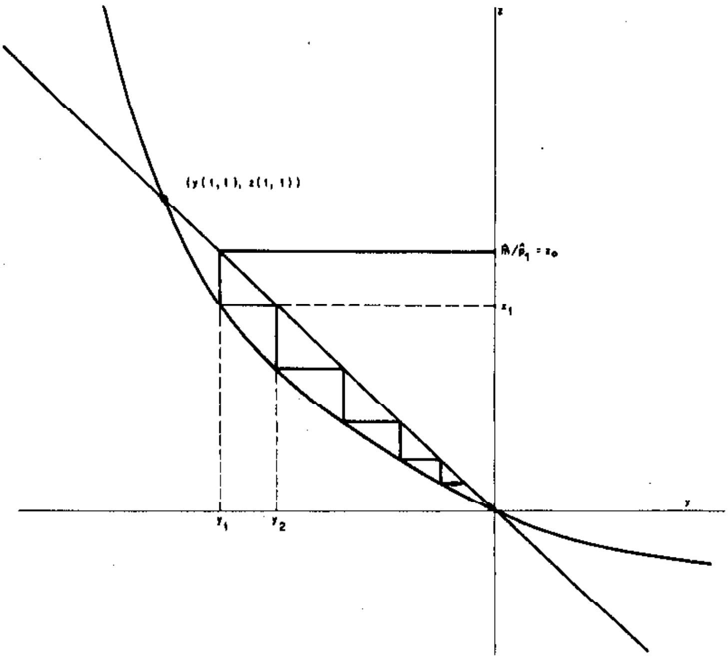

GRAFICO 3

excepto el que empieza en $\hat{m}/\hat{p}_1 = z(1, 1)$, es inflacionario. En el estado autárquico σ, que es igual a menos el recíproco de la pendiente de la curva de transacciones en el origen, es igual a $\beta w_1/w_2 > 1$.

No existe solamente un continuo de equilibrios, sino que además el dinero fiduciario juega un papel crucial y los equilibrios no son necesariamente eficientes en el sentido de Pareto. Nótese que cualquier equilibrio que empieza con $0 < \hat{m}/\hat{p}_1 < z(1, 1)$ es dominado en el sentido de Pareto por el equilibrio en que $\hat{m}/\hat{p}_1 = z(1, 1)$: la primera generación prefiere el z_0 más alto posible, y las generaciones subsiguientes están peor cuanto más alejadas estén de $[y(1, 1), z(1, 1)]$ y más cercanas a la autarquía. En realidad, los equilibrios con mayor $\hat{m}/\hat{p}_1$ dominan en el sentido de Pareto aquellos equilibrios que empiezan con puntos iniciales más bajos. En la sección siguiente puntualizaremos que los equilibrios en que $\hat{m}/\hat{p}_1 < 0$, aunque no son necesariamente dominados por los equilibrios en que $m/p_1 = z(1, 1)$, no son eficientes en el sentido de Pareto. Como Shell (1971) ha puntualizado, este fallo del Primer Teorema del Bienestar se debe al infinito por partida doble de consumidores y bienes. Aunque es posible repetir este fallo del Primer Teorema del Bienestar en un modelo con mercados incompletos, como lo hicieron Cass y Yaari (1966), queremos poner énfasis que ocurre incluso si todos los mercados son completos.

El gráfico 4 contiene la curva de transacciones para el modelo logarítmico en el que $\beta w_1 < w_2$. Observe que para cualquier valor de $\hat{m}/\hat{p}_1$ tal que $\hat{m}/\hat{p}_1 < 0$ existe un equilibrio que converge al estado estacionario en el que $\sigma = 1$. Existe también un equilibrio que empieza con $\hat{m}/\hat{p}_1 = 0$ y permanece en el estado

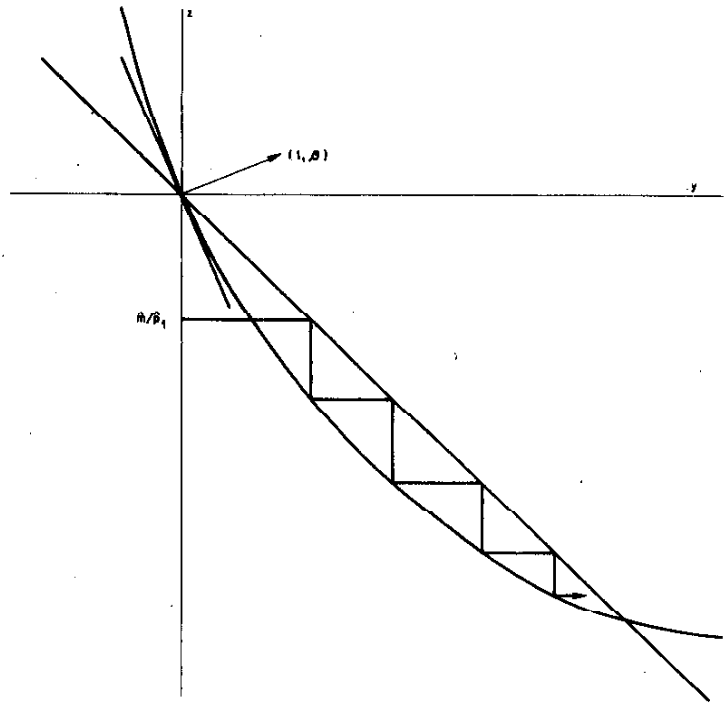

GRAFICO 4

estacionario. Aquí $\sigma = \beta w_1/w_2 < 1$. Este equilibrio es eficiente en el sentido de Pareto, puesto que el valor de la dotación agregada es finita

$$w^0 + w_1 + \sum_{t=2}^{\infty} \sigma^{t-1}(w_1 + w_2) = w^0 + w_1 + \frac{\sigma}{1 - \sigma}(w_1 + w_2) \qquad [3.14]$$

Como puntualizaremos en la próxima sección, todos los equilibrios de este modelo son eficientes en el sentido de Pareto.

Estos dos ejemplos sugieren tres posibles hipótesis: En primer lugar, cualquier indeterminación del equilibrio viene ligada a la inflación si existe dinero fiduciario positivo. En segundo lugar, todas las sendas de precios de equilibrio convergen a algún estado estacionario. En tercer lugar, cualquier indeterminación del equilibrio viene asociada con un volumen distinto de cero de dinero fiduciario. Presentaremos ahora contra ejemplos a las dos primeras proposiciones. En la sección siguiente defenderemos que la tercera, aunque es verdad en cualquier modelo con un bien en cada período y consumidores que viven dos períodos, no se cumple en modelos más generales.

Los ejemplos logarítmicos que hemos analizado tienen la propiedad de que a medida que la razón de precios p_t/p_{t+1} se incrementa, $y(p_t, p_{t+1})$ disminuye y $z(p_t, p_{t+1})$ aumenta. Esto quiere decir que las funciones de demanda y z exhiben sustituibilidad bruta. Consideremos la curva de transacciones dibujada

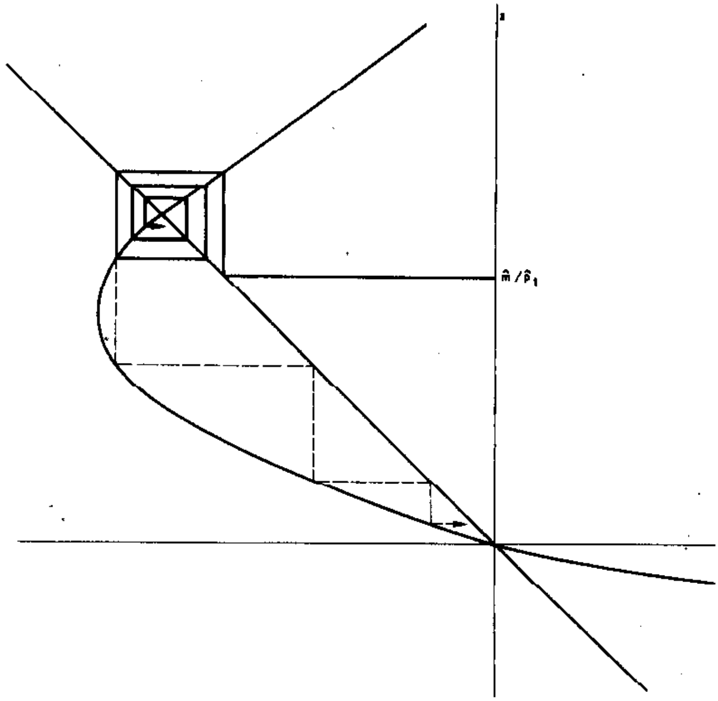

GRAFICO 5

en el gráfico 5. Aquí la sustituibilidad bruta no se cumple en la parte en que la curva de transacciones se mueve hacia atrás. Obsérvese que para cualquier valor de $\hat{m}/\hat{p}_1$ suficientemente cercano a $z(1, 1)$ existe un equilibrio que converge al estado estacionario $\sigma = 1$. El rasgo principal de esta curva de transacciones es que su pendiente en el punto $[y(1, 1), z(1, 1)]$ es positiva y menor que la unidad. Existen también equilibrios que empiezan con $\hat{m}/\hat{p}_1$, cerca de $z(1, 1)$ (o incluso igual) y convergen al estado estacionario: siempre que existan dos valores de z que corresponden a un único y, tenemos la doble opción de irnos de la línea que cruza el origen con pendiente -1 a la curva de transacciones.

Este ejemplo tiene también equilibrios que no convergen a ningún estado estacionario. Consideremos las curvas de transacciones en el gráfico 6. Aquí existe un ciclo de período dos: $z_0, z_1, z_0, z_1, \ldots$ Lá segunda curva de transacciones es la reflexión de la primera sobre la línea con pendiente -1. Los ciclos son puntos donde estas dos curvas intersectan, donde

$$[y(\hat{p}_1, \hat{p}_2), z(\hat{p}_1, \hat{p}_2)] = [-z(\hat{p}_2, \hat{p}_1), -y(\hat{p}_2, \hat{p}_1)] \qquad [3.15]$$

Esto implica que $\hat{m}$ y $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots)$ son un equilibrio de este modelo. Gale (1973) fue el primero en puntualizar la posibilidad de ciclos en esta clase de modelos. Benhabib y Day (1982) han demostrado que existen también ejemplos con equilibrio que no convergen a ningún estado estacionario o a ningún

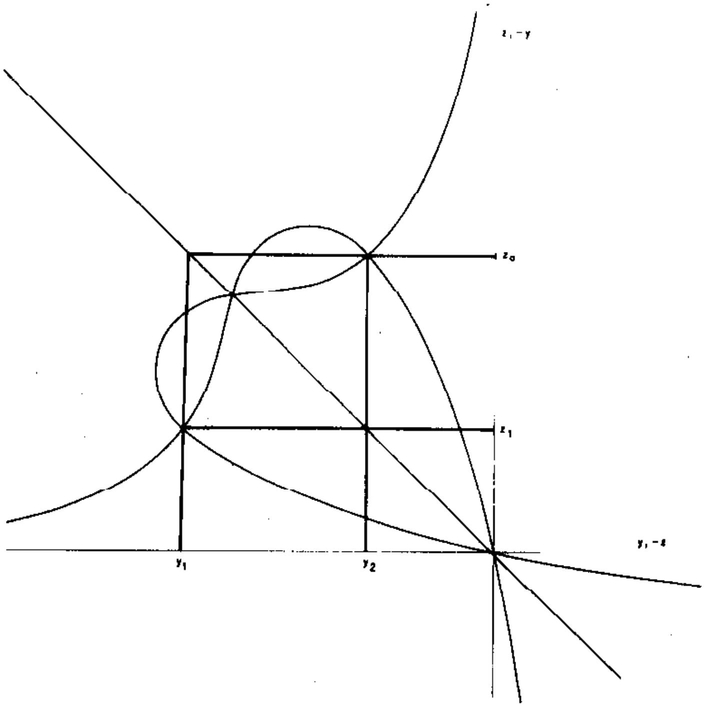

GRAFICO 6

ciclo de cualquier periodicidad. La posibilidad de tal comportamiento extraño, a menudo referido mediante el término de dinámica caótica, ha sido analizada en profundidad por Grandmont (1985).

4. Modelos generales de generaciones sucesivas

Fijamos ahora nuestra atención en modelos de generaciones sucesivas con varios bienes en cada período y varios consumidores en cada generación. Si permitimos varios bienes y varios consumidores, el supuesto de dos períodos de vida es completamente general: Balasko, Cass y Shell (1980) presentan un procedimiento simple para redefinir períodos y generaciones que convierte un modelo en que los consumidores viven durante un número finito de períodos en uno en que viven solamente durante dos períodos. Supongamos que los consumidores viven durante k períodos. Entonces redefiniremos las generaciones de tal forma que las generaciones $-k + 2$, $-k + 3$, ..., 0 se convierten en la generación 0, las generaciones 1, 2, ..., $k - 1$ se convierten en la generación 1 y así sucesivamente. Redefiniremos también los períodos de la misma forma. El gráfico 7 ilustra este procedimiento para el caso en que $k = 4$. Observe que estas generaciones viven solamente durante dos períodos redefinidos. Si existen n bienes en cada período original, existen $(k - 1)n$ bienes, indexados por la

		Período									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Generación	−2	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	−1	X	X	0	0	0	0	0	0	0	
	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	
	1	X	X	X	X	0	0	0	0	0	1
	2	0	X	X	X	X	0	0	0	0	
	3	0	0	X	X	X	X	0	0	0	
	4	0	0	0	X	X	X	X	0	0	2
	5	0	0	0	0	X	X	X	X	0	
	6	0	0	0	0	0	X	X	X	X	
	7	0	0	0	0	0	0	X	X	X	3
	8	0	0	0	0	0	0	0	X	X	
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	X	
		1			2			3			

GRAFICO 7

fecha, en cada período redefinido. Si existen h consumidores en cada generación original, existirán $(k-1)h$ consumidores en cada generación redefinida.

El modelo con varios bienes y varios consumidores presenta las mismas posibilidades de existencia para equilibrios que son ineficientes y equilibrios con dinero fiduciario que el modelo simple de la sección previa. Posee incluso un mayor ámbito para la indeterminación del equilibrio. El consumidor j en la generación t soluciona el problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } u_j(y_t^j + w_1,\ z_t^j + w_2) \\ &\text{sujeto a } p_t y_t + p_{t+1} z_t = 0 \end{aligned} \qquad [4.1]$$

En este caso, y_t^j, z_t^j, w_1, w_2, p_t y p_{t+1} son todos vectores de dimensión n. Si las funciones de exceso de demanda son $y^j(p_t,\ p_{t+1})$ y $z^j(p_t,\ p_{t+1})$, entonces las funciones de exceso de demanda agregada para la generación t son $y(p_t,\ p_{t+1})$ y $z(p_t,\ p_{t+1})$ donde, por ejemplo

$$y(p_t,\ p_{t+1}) = \sum_{j=1}^{h} y^j(p_t,\ p_{t+1})$$

Suponemos que y, z son continuamente diferenciables para todos los vectores de precios (p_t, p_{t+1}) estrictamente positivos, homogéneas de grado cero en (p_t, p_{t+1}), y que cumplen la ley de Walras,

$$p_t y(p_t, p_{t+1}) + p_{t+1} z(p_t, p_{t+1}) \equiv 0. \qquad [4.3]$$

Además, existe una generación vieja, que vive sólo en el primer período y que tiene como función de exceso de demanda agregada $z_0(p_1, m)$. Suponemos que z_0 es continuamente diferenciable para todos los vectores de precios p_1 estrictamente positivos y en un intervalo abierto de niveles de dinero m, que incluye el valor 0, es homogénea de grado cero en (p_1, m) y cumple la ley de Walras.

$$p_1 z_0(p_1, m) \equiv m \qquad [4.4]$$

Un equilibrio de este modelo es, de nuevo, una cantidad de dinero externo $\hat{m}$ y una sucesión de vectores precio $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots)$ que satisfacen [3.8] y [3.9] donde las variables son interpretadas como vectores. Para ver la posibilidad de indeterminación, contemos el número de ecuaciones e incógnitas en las condiciones de equilibrio. La condición de equilibrio en el primer período,

$$z_0(\hat{p}_1, \hat{m}) + y(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = 0 \qquad [4.5]$$

contiene n ecuaciones con $2n + 1$ incógnitas. Puesto que las ecuaciones son todas homogéneas podemos imponer una normalización para reducir esto a $2n$ incógnitas. Las condiciones de equilibrio en los períodos subsiguientes,

$$z(\hat{p}_{t-1}, \hat{p}_t) + y(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) = 0, \; t = 2, 3, \ldots \qquad [4.6]$$

añaden, cada una, n ecuaciones y n incógnitas. El sistema completo tiene, por tanto, n grados de libertad. Si fijásemos $\hat{m} = 0$ a priori, existe una incógnita menos, y esto reduce los grados de libertad a $n - 1$. La idea es que escogemos $\hat{m}$, $\hat{p}_1$, y $\hat{p}_2$ para satisfacer [4.5] y entonces usamos [4.6] como una ecuación no lineal en diferencias para determinar $\hat{p}_3, \hat{p}_4, \ldots$

El problema con el simple recuento de ecuaciones e incógnitas es que no sabemos siempre si podemos utilizar [4.6] para continuar una sucesión de precios de equilibrio, dados $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ de forma arbitraria. En el gráfico 3, por ejemplo, si empezamos con cualquier valor de $\hat{m}/\hat{p}_1$ por encima de $z(1, 1)$ podemos continuar el equilibrio durante unos pocos períodos, pero eventualmente alcanzaremos una situación donde no podemos continuar porque z va a ser superior a w_1 y no nos podemos mover de forma vertical a la curva de transacciones. En general, queremos evitar situaciones en que no podemos usar [4.6] para calcular un valor positivo de p_{t+1} como función de p_{t-1} y p_t. Una forma de hacer esto es requerir que la sucesión de precios de equilibrio converja a un estado estacionario en el que la matriz de derivados parciales de $y(p_t, p_{t+1})$ con respecto a p_{t+1} es no singular. El teorema de la función implícita nos dice entonces que en un entorno abierto de este estado estacionario podemos calcular p_{t+1}.

Un estado estacionario de este modelo es un vector de precios relativos p y un factor de inflación σ tal que $p_t = \sigma^t p$ satisface [4.6]. Existen dos tipos de estados estacionarios, estados estacionarios nominales en que existe una cantidad distinta de cero de deuda nominal que es transferida de una generación a otra, y estados estacionarios reales, en que no existe tal transferencia. Observe que en cualquier equilibrio la cantidad de deuda nominal transferida de una generación a otra permanece siempre constante: [4.4] y [4.5] implican que $-\hat{p}_1 y(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = \hat{p}_1 z_0(\hat{p}_1, \hat{m})$; la ley de Walras hace que $\hat{p}_2 z(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = -\hat{p}_1 y(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ mediante [4.6] obtenemos $-\hat{p}_2 y(\hat{p}_2, \hat{p}_3) = \hat{p}_2 z(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$; y así, sucesivamente. La condición del estado estacionario es

$$z(\sigma^{t-1}p, \sigma^t p) + y(\sigma^t p, \sigma^{t+1}p) = z(p, \sigma p) + y(p, \sigma p) = 0 \qquad [4.7]$$

Esto implica que $pz(p, \sigma p) + py(p, \sigma p) = 0$. La ley de Walras hace que $py(p, \sigma p) + \sigma pz(p, \sigma p) = 0$. Restando una de la otra, obtenemos $(1 - \sigma)pz(p, \sigma p) = 0$. Esto hace que $\sigma = 1$ en un estado estacionario nominal. Kehoe y Levine (1984b) demuestran que para casi todas las economías $\sigma = 1$ en un estado estacionario real.

Balasko y Shell (1980) y Burke (1986a) han demostrado que una condición necesaria y suficiente para la eficiencia en el sentido de Pareto de un equilibrio es que

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|p_t\|^{-1} = \infty \qquad [4.8]$$

Aquí $\|p_t\| = (p_t \cdot p_t)^{1/2}$ es la usual norma Euclidea. Los mencionados autores imponen una condición uniforme sobre la curvatura de las curvas de indiferencia que es natural en un contexto estacionario. Obsérvese que cualquier equilibrio que converge a un estado estacionario en el que $\sigma > 1$, un estado estacionario inflacionario, es Pareto-ineficiente puesto que la suma en [4.8] converge. Sin embargo, cualquier equilibrio que converge a un estado estacionario donde $\sigma \leqslant 1$ es Pareto-eficiente puesto que la suma en [4.8] diverge. En realidad es fácil demostrar que si $\bar{\sigma} = 1$ la asignación de equilibrio maximiza una suma ponderada de utilidades de los consumidores de una generación representativa sujeto a las restricciones de consumo del estado estacionario.

Cuando existen varios bienes en cada período y varios consumidores en cada generación no se produce necesariamente la existencia de un estado estacionario nominal único y, asimismo, un estado estacionario real único, como ocurría en el ejemplo de la sección precedente. Incluso con un bien en cada período, pero más de un consumidor en cada generación, pueden existir varios estados estacionarios reales, aunque exista un único estado estacionario real. Consideremos, por ejemplo, un modelo estático de intercambio de dos personas con equilibrios múltiples. Este modelo es fácil de construir en una caja de Edgeworth; véase a título de ejemplo Shapley y Shubik (1977). Convirtamos ahora esto en un modelo de generaciones sucesivas en que existen dos consumidores en cada generación con las mismas preferencias y dotaciones del único bien en cada uno de los dos períodos de sus vidas. Los equilibrios múltiples del modelo estático son estados estacionarios de generaciones sucesivas en que cada consumidor solamente intercambia con el otro agente de su misma generación. Esto sirve para ilustrar el hecho de que los estados estacionarios reales no son, en general, autárquicos, como lo son en el modelo sencillo. Con varios bienes en cada período incluso los estados estacionarios nominales no son necesariamente únicos. Kehoe y Levine (1984b) demuestran, sin embargo, que en general, toda economía tiene un número impar de estados estacionarios nominales (en particular, un número distinto de cero) y un número impar de estados estacionarios reales. Además, la matriz de derivadas parciales de y con respecto al segundo vector de argumentos es casi siempre no singular en todo estado estacionario.

Para analizar el comportamiento de las sucesiones de precios de equilibrio que convergen a un estado estacionario, Kehoe y Levine (1985a) linealizan las condiciones de equilibrio [4.5] y [4.6]. El teorema de la variedad estable local de la teoría de sistemas dinámicos establece que el comportamiento del sistema no lineal cerca del estado estacionario es cualitativamente el mismo que el sistema lineal [véase Irwin (1980)]. Kehoe y Levine consideran el conjunto de pares de precios $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ que satisfacen la condición de equilibrio y conllevan convergencia al estado estacionario, cuando son usados como condiciones iniciales de la ecuación en diferencias no lineal [4.6]. Este conjunto es una variedad, un conjunto de puntos que es equivalente localmente a un subconjunto abierto de un espacio euclídeo de dimensión menor que $2n$. (La variedad prototipo es un subespacio lineal.) Demuestran que esta variedad puede tener una dimensión tan grande como n si existe dinero externo y tan grande como $n - 1$ si no existe dinero. Esta variedad puede tener dimensión tan pequeña como 0, en el caso en que esté compuesta de puntos aislados. (La mejor aproximación lineal a esta variedad cerca del estado estacionario es la intersección del subespacio estable de la versión linealizada de [4.6] con el conjunto de vectores que satisfacen la versión linealizada de [4.5]. Casi todas las economías son tales que cualquier pequeña perturbación produce una economía con las mismas propiedades cualitativas). Kehoe y Levine prueban también que existen ejemplos robustos de estados estacionarios para los cuales ningún equilibrio converge a ellos. Esto no puede suceder con un solo bien en cada período porque la ley de Walras implica que m y p pueden ser seleccionados de tal forma quë el vector de precios del estado estacionario $(p, \sigma p)$ satisface $z_0(p, m) + y(p, \sigma p) = 0$. Consecuentemente, el estado estacionario es también un equilibrio.

Nótese que podemos utilizar un artificio similar al que usemos para convertir economías con consumidores que viven durante k períodos en economías en que viven durante dos para transformar el estudio de equilibrios que convergen a ciclos de cualquier período finito en el estudio de equilibrios que convergen a estados estacionarios: supongamos que una economía tiene un ciclo de período k en el sentido de que $(p_{t+1}, \ldots, p_{t+k}) = (\sigma^t p_1, \ldots \sigma^t p_k)$ satisface [4.6]. Redefinamos las generaciones, de tal forma que, por ejemplo, las generaciones 1, 2, ..., k se convierten en la generación 1. Similarmente redefinamos los bienes. Un ciclo de período k es ahora un estado estacionario del modelo redefinido.

5. El teorema de la equivalencia ricardiana

En 1817 Ricardo se formuló la pregunta: ¿Existe alguna diferencia en que un gobierno financie un incremento de gasto aumentando los impuestos o vendiendo bonos? [Véase Ricardo (1951, pp. 244-249).] La respuesta más sencilla a la que llegó, aunque era consciente de que existían complicaciones, fue la de que no existía diferencia, puesto que los consumidores anticipan que deben pagar más impuestos en el futuro si existe una venta de bonos para que el gobierno pueda efectuar los pagos de interés. Esto está en contradicción con la respuesta keynesiana a la misma pregunta que un incremento de gasto público financiado por bonos posee el efecto multiplicador completo, mientras que un incremento de gasto financiado por impuestos tiene un multiplicador más pequeño. La distinción crucial entre los dos tipos de análisis es que en uno el comportamiento del consumidor con respecto al ahorro se altera mediante la emisión de bonos y que en el otro no. Esto se reduce, como Barro (1974) lo ha puesto, a la pregunta: ¿Son los bonos riqueza neta?

Contestemos primeramente esta pregunta utilizando nuestro modelo con consumidores de vida infinita. Introducimos en este modelo un gobierno que compra bienes $g_t = (g_{1t}, \ldots, g_{nt})$ en el período t, $t = 1, 2, \ldots$ Requerimos que este programa de gastos sea factible,

$$0 \leqslant g_t \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} w^j \qquad t = 1, 2, \ldots \qquad [5.1]$$

Supongamos que estas compras vienen financiadas por impuestos de sumas globales $\tau^1, \ldots, \tau^h$, de tal forma que el presupuesto del gobierno se mantiene sin déficit ni superávit en cada período,

$$\sum_{j=1}^{h} \tau_t^j = p_t g_t \qquad t = 1, 2, \ldots \qquad [5.2]$$

Entonces la restricción presupuestaria a la que se enfrenta el consumidor j es

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^j = \sum_{t=1}^{\infty} (p_t w^j - \tau_t^j)$$

Supongamos, por otro lado, que el gobierno emite bonos b_t, $t = 1, 2, \ldots$, con interés determinado de forma competitiva. Financia estos pagos de interés mediante impuestos de sumas globales θ_t^j. El gobierno debe equilibrar su presupuesto en el sentido de que el valor descontado presente de sus gastos debe ser igual al valor presente de sus ingresos

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} p_t g_t + \sum_{t=1}^{\infty} b_t &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h} \theta_t^j + b_t^j \\ \sum_{t=1}^{\infty} p_t g_t &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h} \theta_t^j \end{aligned} \qquad [5.3]$$

$\sum_{t=1}^{\infty} b_t$ aparece en ambos lados de la restricción presupuestaria, puesto que el valor presente de un bono es igual a la suma de los pagos de interés sobre él. La restricción presupuestaria del consumidor se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} (p_t c_t + b_t^j) &= \sum_{t=1}^{\infty} (p_t w^j - \theta_t^j) + \sum_{t=1}^{\infty} b_t^j \\ \sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t &= \sum_{t=1}^{\infty} (p_t w^j - \theta_t^j) \end{aligned} \qquad [5.4]$$

Aquí b_t^j es la compra neta de bonos por el consumidor j en el período t y

$$\sum_{j=1}^{h} b_t^j = b_t \qquad [5.5]$$

Observe que si

$$\sum_{t=1}^{\infty} \tau_t^j = \sum_{t=1}^{\infty} \theta_t^j \qquad [5.6]$$

estos dos modelos son esencialmente idénticos. En particular los agentes se enfrentan a las mismas restricciones presupuestarias. Este es el teorema de la equivalencia ricardiana. Existe un conjunto importante de hipótesis: en primer lugar, existe un número finito de consumidores que viven indeterminadamente. En segundo lugar, existen mercados de capital perfectos. Esto implica que cada consumidor se enfrenta a una única restricción presupuestaria. En tercer lugar, todos los impuestos son de sumas globales. De otro modo, los precios relativos se verían distorsionados de forma diferente mediante diferentes esquemas impositivos. En cuarto lugar, los impuestos no son redistributivos. En otras palabras, los consumidores se enfrentan a la misma factura total bajo los dos esquemas impositivos. De otra forma los precios relativos cambiarían debido al efecto renta.

No estamos afirmando que el equilibrio es el mismo que en el caso $g_t = 0$, $t = 1, 2, \ldots$ Puesto que el gobierno está consumiendo algunos de los bienes que, de otro modo, hubiesen ido a parar a los consumidores, este no es el caso. La política fiscal siempre tiene efectos reales. Es la forma en que se ha financiado lo que es irrelevante.

Es difícil dar al Teorema de la Equivalencia Ricardiana una interpretación en el modelo de generaciones sucesivas: esquemas impositivos alternativos que difieren en el tiempo tienen necesariamente efectos redistributivos, puesto que los consumidores viven en tiempos diferentes. Además, con un número infinito de consumidores y bienes no existe, como hemos visto, razón alguna para que

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t g_t$$

converja. El gobierno puede, por lo tanto, emitir bonos que nunca tendría que pagarlos. Estos bonos son como inyecciones de dinero fiduciario. El gráfico 8 ilustra un ejemplo con un estado estacionario, en que $g_t = g > 0$ en todo período. Aquí la inflación erosiona el valor del nivel inicial del dinero fiduciario a la misma tasa que el valor en que el volumen total de bonos del Estado se incrementa. El volumen total real de deuda nominal, dinero fiduciario y bonos permanece constante en la cantidad $z + g$. La tasa de interés en el estado estacionario es

$$r = 1/\sigma - 1 < 0$$

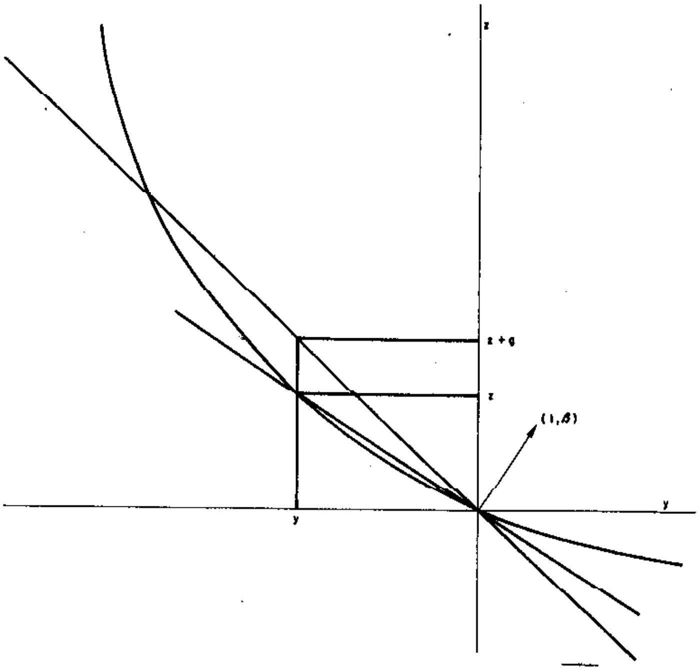

GRAFICO 8

Obsérvese que aunque el gobierno está consumiendo $g > 0$ del único bien en cada período, este equilibrio domina en el sentido de Pareto el equilibrio autárquico donde no se consume nada. Ejemplos de este tipo se discuten en Sargent (1985, capítulo 8).

Barro (1974) ha defendido que el Teorema de la Equivalencia Ricardiana se cumple en modelos de generaciones sucesivas en los que los consumidores incluyen el bienestar de sus descendientes en sus propias funciones de utilidad. Puesto que sus descendientes valoran similarmente el bienestar de los subsiguientes descendientes, esto puede convertir el problema de maximización de utilidad del consumidor en el problema de maximización de utilidad de una familia de vida infinita. El problema con este argumento es que, en general, debemos permitir que algunos consumidores puedan legar deudas, así como herencias positivas a sus descendientes. En este caso nos gustaría que los consumidores incluyan la utilidad de sus progenitores en sus propias utilidades. Pensemos en nuestro ejemplo de dos consumidores de vida infinita con funciones de utilidad logarítmicas, como un modelo de dichas familias: una familia de consumidores no consume nada asintóticamente. Usan casi toda su renta para pagar la deuda de la familia, la cual ha sido heredada de sus progenitores y ha pasado a sus descendientes. Esta clase de problema ocurre siempre si las diferentes familias poseen diferentes factores de descuento en la forma reducida de las funciones de utilidad. Los convenios institucionales en las sociedades modernas hacen que esta característica del argumento de la herencia sea bastante poco realista. Como el propio Barro ha puntualizado, si una familia se encuentra en una solución de esquina debido a una restricción de no negatividad en las herencias, la familia se enfrenta a una sucesión de restricciones presupuestarias que no pueden ser agregadas en una sola.

Similarmente, un modelo con consumidores de vida infinita que se enfrentan a restricciones de liquidez pueden poseer características parecidas a un modelo de generaciones sucesivas. [Un ejemplo de ello se encuentra en Woodford (1986).] Si no podemos reducir el problema de maximización de utilidad del consumidor a uno con un número finito de restricciones presupuestarias, entonces no podemos probar que el valor de la dotación agregada es finita. Consecuentemente, los equilibrios no necesitan ser eficientes en el sentido de Pareto, y pueden existir equilibrios en los que el dinero fiduciario juega un papel relevante. Incluso nuestro argumento de que existe un número finito de equilibrios deja de cumplirse. La característica esencial de ese argumento era que cada consumidor se caracteriza por un único multiplicador de Lagrange, $\lambda_j = 1/\alpha_j$. Si el consumidor no puede igualar su utilidad marginal de la renta en períodos diferentes, entonces actúa, hasta cierto punto, como una sucesión de consumidores diferentes. Puede existir un continuo robusto de equilibrios, y el Teorema de la Equivalencia Ricardiana no se cumple necesariamente.

6. Implicaciones para modelos finitos

¿Qué se puede inferir de nuestro análisis del modelo de generaciones sucesivas sobre las propiedades de modelos con un número elevado, pero finito, de agentes y bienes? Supongamos que truncamos el modelo a un cierto período T usando una generación joven terminal $y_T(p_T, m)$ análoga a la generación vieja inicial $z_0(p_1, m)$. El dinero externo ahora corresponde a una transferencia de la generación joven terminal a la generación vieja inicial. Existe ahora un número finito de condiciones de equilibrio.

$$
\begin{aligned}
z_0(\hat{p}_1, \hat{m}) + y(\hat{p}_1, \hat{p}_2) &= 0 \\
z(\hat{p}_1, \hat{p}_2) + y(\hat{p}_2, \hat{p}_3) &= 0 \qquad [6.1] \\
&\vdots \\
z(\hat{p}_{T-1}, \hat{p}_T) + y_T(\hat{p}_T, \hat{m}) &= 0
\end{aligned}
$$

Todos los equilibrios de este modelo son óptimos en el sentido de Pareto. En general existe una familia unidimensional de equilibrios indexados por el pago de transferencia real $\hat{m}/\|\hat{p}_1\|$.

Este método de truncamiento del modelo es a menudo equivalente a la especificación de expectativas de precios en períodos posteriores a la terminación del modelo. Por ejemplo, podíamos especificar $y_T(p_T, m)$ mediante $y_T(p_T, \|p_T\|\sigma p)$, donde (p, σ) es un estado estacionario. En este caso, por supuesto

$$m = \|p_T\|\sigma p z(p_T, \|p_T\| \sigma p)$$

Una aplicación de este enfoque puede verse en Auerbach, Kotlikoff y Skinner (1983).

Consideremos una situación donde un equilibrio domina en el sentido de Pareto a otro equilibrio en el modelo de horizonte infinito. Cada uno de ellos puede ser un equilibrio del modelo truncado bajo una elección apropiada de y_T.

Supongamos que se puede efectuar esto usando la misma función y_T con diferentes pagos reales de transferencias. Puesto que ambos equilibrios del modelo truncado son eficientes en el sentido de Pareto, el equilibrio que domina en el modelo de horizonte infinito debe asignar algunos miembros de la generación terminal una utilidad más baja que el equilibrio considerado inferior. Si T es lo suficientemente elevado, el problema está claro: Sacrificando el bienestar de una generación, las restantes han sido beneficiadas, y la sociedad considerada como un todo ha sido beneficiada desde un punto de vista utilitarista.

En un modelo de horizonte infinito puede existir una indeterminación de n dimensiones si existe dinero externo y de $n - 1$ dimensiones cuando no existe. La dimensión adicional de indeterminación que aparece debido a la existencia del dinero fiduciario corresponde a la indeterminación parametrizada por los pagos reales de transferencias. ¿Qué ocurre con las otras dimensiones? Para ofrecer una contestación a esta pregunta supongamos que tenemos dos sucesiones de precios de equilibrio, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots)$ y $(p'_1, p'_2, \ldots)$, y que ambos convergen al mismo estado estacionario. Supongamos que en ambos existe el mismo volumen real de dinero externo

$$\hat{m}/\|\hat{p}_1\| = m'/\|p_1\|$$

Si en el truncamiento utilizamos una generación joven terminal

$$\hat{y}_T(p_T,\ m) = y_T(p_T,\ \hat{p}_{T+1}) \qquad [6.2]$$

$m = \hat{m}$, entonces $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_T)$ es un equilibrio. Si realizamos el truncamiento de forma análoga con y_T, entonces $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_T)$ es un equilibrio. El gráfico 9 ilustra esta clase de situación. Para un T suficientemente elevado $(\hat{p}_T,\ \hat{p}_{T+1})$ va a estar suficientemente cercano a $(p'_T,\ p'_{T+1})$ independientemente de la diferencia existente entre $\hat{p}_1$ y p'_1. Por tanto, la indeterminación del equilibrio corresponde a la sensitividad de los precios iniciales que se hace más aguda a medida que el horizonte temporal T se hace superior. Véase Kehoe y Levine (1986), donde existen simulaciones númericas de un ejemplo con dicha propiedad.

Hemos de apuntar otra forma de interpretar un modelo de generaciones sucesivas a partir de un modelo con horizonte temporal finito. Supongamos que en cada período la probabilidad de que el mundo se termine al inicio del período siguiente es θ, $0 < \theta < 1$. Es entonces natural suponer que el consumidor j en la generación t cumpla el problema de maximización de utilidad esperada

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } (1-\theta)u_j(y_t^j + w_1) + \theta v_j(y_t^j + w_1,\ z_t^j + w_2) \\ &\text{sujeto a } p_t y_t^j + p_{t+1} z_t^j = 0 \end{aligned} \qquad [6.2]$$

En este caso, u_j es su función de utilidad si el mundo finaliza antes del segundo período de su vida y v_j es su función de utilidad en el caso contrario. Aunque el mundo finaliza en un número finito de períodos con probabilidad igual a la unidad, este modelo es idéntico a uno de generaciones sucesivas con horizonte infinito. Puede poseer equilibrios que no son eficientes en el sentido de Pareto, equilibrios en que el dinero juega un papel relevante, y equilibrios en que con una o más dimensiones de indeterminación.

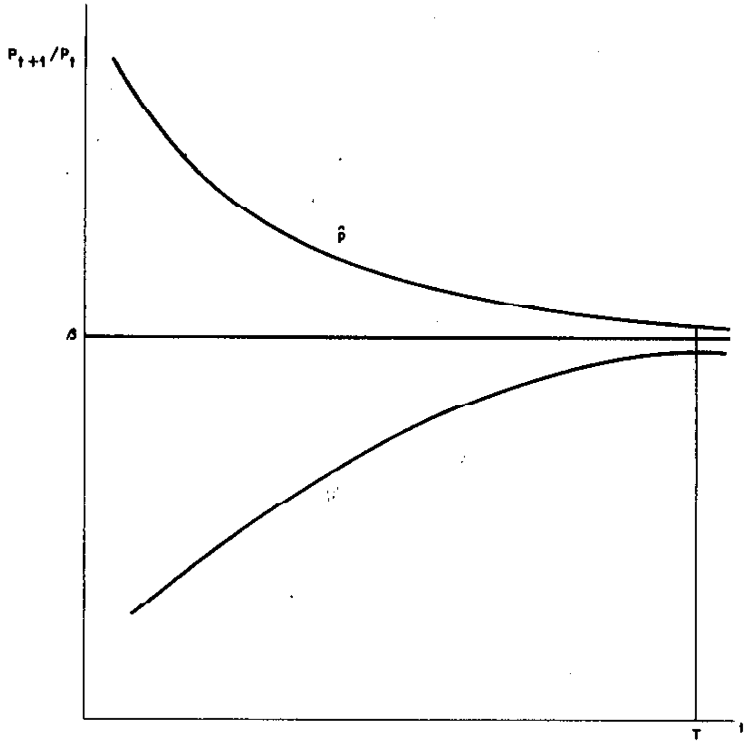

GRAFICO 9

7. Extensiones y conclusiones

Los resultados que hemos presentado en este artículo pueden ser extendidos a modelos más generales. Kehoe, Levine y Romer (1986) han extendido nuestro análisis del modelo con un número finito de agentes de vida infinita a modelos similares en los que existe producción y acumulación de capital. La única dificultad existente es la de asegurar que las funciones de transferencias usadas en las condiciones de equilibrio sean continuamente diferenciables. Muller y Woodford (1985) han extendido nuestro análisis del modelo de generaciones sucesivas a modelos que incluyen consumidores de horizonte temporal infinito, activos y producción. Obtienen que la presencia de consumidores, o activos, de horizonte temporal infinito puede hacer que el valor de la dotación agregada sea finito. Esto imposibilita la existencia de equilibrios Pareto-ineficientes y con dinero externo. Sin embargo, esto no sirve para excluir la existencia de equilibrios indeterminados.

¿Es que la existencia de equilibrios ineficientes en el sentido de Pareto y con dinero fiduciario está basada en el hecho de existir un número infinito de consumidores o en que los consumidores poseen intervalos de vida finitos? Kehoe (1986) considera un modelo sencillo de intercambio puro en que existe un número infinito de consumidores que viven durante todo el horizonte temporal de la economía. Este modelo tiene equilibrios que son ineficientes en el sentido de Pareto y equilibrios con dinero fiduciario. También contiene equilibrios con varias dimensiones de indeterminación.

Como hemos puntualizado, la indeterminación es un problema relativamente separado de la ineficiencia en el sentido de Pareto y del dinero externo. Kehoe, Levine, Mas-Colell y Zame (1986) consideran un modelo abstracto con un número infinito de consumidores y bienes. Los únicos precios que se consideran asignan un valor finito a la dotación agregada. Esto excluye la existencia de ineficiencia en el sentido de Pareto y dinero externo. Aun así, existen ejemplos robustos con cualquier dimensión de indeterminación. Como hemos sugerido, la razón de esta indeterminación se debe a que no podemos reducir las condiciones de equilibrio a un número finito de ecuaciones e incógnitas. Estos autores encuentran también que existe un número finito de equilibrio localmente únicos si los consumidores son suficientemente similares. Esto generaliza nuestros resultados para economías con un número finito de consumidores.

Santos y Bona (1986) y Geanakoplos y Brown (1985) han extendido los resultados de Kehoe y Levine (1985a) para modelos estacionarios de generaciones sucesivas de intercambio puro a modelos con estructuras no estacionarias. Al igual que Kehoe y Levine estos autores necesitan fijar su atención en equilibrios que permanecen suficientemente cercanos entre sí, en un cierto sentido. Obtienen que, a pesar de ser el escenario no estacionario, existen n dimensiones de indeterminación potencial si existe dinero fiduciario y $n - 1$ en caso contrario.

Un aspecto perturbador de la indeterminación potencial del equilibrio es que ocurre para algunos valores de los parámetros del modelo, pero no para otros. Nos gustaría de alguna forma clasificar los valores de los parámetros para los que la indeterminación no ocurre. El primer paso en esta dirección ha sido tomado por Balasko y Shell (1981), que consideran un modelo con varios bienes en cada período, pero un único consumidor en cada generación, que vive dos períodos, con una función de utilidad Cobb Douglas. Demuestran que no existe indeterminación cuando no hay dinero fiduciario y solamente una dimensión de indeterminación cuando se incluye el mismo. Geanakoplos y Polemarchakis (1984) han demostrado que el aspecto esencial de este análisis es que el único consumidor de dos períodos posee preferencias intertemporalmente separables. Kehoe y Levine (1984a) han demostrado además que cualquier perturbación pequeña de un modelo con un único consumidor que vive dos períodos con preferencias intertemporalmente separables, aunque introduzca pequeñas heterogeneidades entre los consumidores o pequeñas interdependencias en el consumo temporal, conserva las mismas características.

Un descubrimiento más significativo es el efectuado por Kehoe, Levine, Mas-Colell y Woodford (1986), que consideran economías generales de generaciones sucesivas de intercambio puro con varios bienes en cada período y varios agentes en cada generación, cuyas funciones de exceso de demanda exhiben la propiedad de sustituibilidad bruta. Demuestran que hay un único equilibrio si no existe dinero, aunque puede haber una dimensión de indeterminación con dinero externo, existe como mucho un único equilibrio para cada nivel real de dinero fiduciario en el primer período. Además, su análisis es global en vez de local. Si la economía es estacionaria, entonces existe un único estado estacionario nominal y un único estado estacionario real, y cualquier equilibrio converge a uno de ellos; desafortunadamente, existen ejemplos muy corrientes que violan la sustituibilidad bruta. Kehoe y Levine (1986) consideran un modelo con un único bien en cada período y un único consumidor en cada generación que vive tres períodos. Este consumidor posee una función de utilidad con elasticidad constante de sustitución. Obtienen que para valores de los parámetros bastante usuales este modelo exhibe indeterminación incluso sin dinero fiduciario y más de una dimensión de indeterminación con el mismo. Además, hacen que el parámetro crucial, la elasticidad de sustitución del consumo a lo largo del tiempo, conforme con la evidencia empírica.

Nuestro análisis se ha centrado en las diferencias entre modelos con un número finito de consumidores de horizonte temporal infinito y modelos de generaciones sucesivas. Aun así, estos dos tipos de modelos poseen importantes propiedades comunes. En ambos, por ejemplo, los equilibrios siempre existen. Puesto que las condiciones de equilibrio para un modelo con un número finito de agentes de vida infinita pueden ser transformadas usando el enfoque de Negishi (1960), en las de un modelo con un número finito de bienes es relativamente sencillo probar la existencia del equilibrio en dichos modelos. Esto se hace, por ejemplo, en Kehoe, Levine y Romer (1986). La prueba de la existencia del equilibrio en modelos de generaciones sucesivas resulta ser bastante más compleja. Considerando el límite de una sucesión de economías truncadas, Balasko, Cass y Shell (1980) prueban la existencia de un equilibrio con $\hat{m} = 0$ en un modelo de generaciones sucesivas de intercambio puro. En modelos generales con un número contable de consumidores y bienes, Burke (1986b, 1986c) y Wilson (1981) han demostrado la existencia del equilibrio. La presencia de dinero fiduciario puede ser necesaria, sin embargo, para que exista el equilibrio.

Otra propiedad que estos dos tipos de modelos tienen en común es que el Segundo Teorema de la Economía del Bienestar se cumple; es decir, cualquier asignación eficiente en el sentido de Pareto puede dar lugar a un equilibrio competitivo con transferencias. Esto se prueba en el modelo de generaciones sucesivas en Balasko y Shell (1980). El papel que el dinero monetario juega para soportar una asignación eficiente en el sentido de Pareto puede ser interpretada como una transferencia. Desafortunadamente, Cass, Okuno y Zilcha (1979) y Millan (1981) contienen ejemplos en los que no existe asignación eficiente que puede ser soportada como un equilibrio competitivo, dando solamente una transferencia a la generación primera. Burke (1986a), sin embargo, demuestra que una transferencia a la generación primera soporta la optimalidad si es seguida por una sucesión de impuestos sobre las generaciones subsiguientes. Además, la suma de los pagos reales de impuestos puede ser hecha arbitrariamente pequeña.

¿Qué aspectos de nuestro análisis se extienden a modelos intertemporales con incertidumbre? Si todos los mercados están completos, entonces el análisis del modelo con un número finito de consumidores de horizonte infinito cubre este caso. En particular, todos los equilibrios son eficientes en el sentido de Pareto, no existe papel relevante para el dinero fiduciario, y genéricamente existe un número finito de equilibrios. Los bienes son indexados por las historias de los estados de la naturaleza y también por la fecha. Véase Kehoe y Levine (1985b) para un análisis de esta clase. Sin embargo, en un modelo estocástico de generaciones sucesivas el supuesto de mercados completos es poco natural: en un escenario determinista hemos argumentado que no existe diferencia alguna en que todo el comercio tenga lugar en el primer período o que tenga lugar de forma secuencial. En un escenario estocástico éste ya no es necesariamente el caso. Los consumidores desearían realizar intercambios en los períodos con anterioridad a su nacimiento para asegurarse sobre la posibilidad de nacer en circunstancias desfavorables. Dutta y Polemarchakis (1985) presentan un análisis de un modelo estocástico de generaciones sucesivas sencillo y demuestran la diferencia entre equilibrios con mercados completos y equilibrios en que los consumidores sólo pueden comerciar durante los períodos en que viven.

Como hemos puntualizado, los modelos con consumidores de horizonte infinito y mercados incompletos poseen propiedades similares a los modelos de generaciones sucesivas. Bewley (1980, 1983), Scheinkman y Weiss (1986) y Levine (1986) analizan modelos estocásticos sencillos donde existen consumidores de horizonte temporal infinito que se enfrentan a restricciones de prestar y pedir prestado. De forma no sorprendente, obtienen que dichos modelos poseen equilibrios que no son eficientes en el sentido de Pareto y equilibrios en los que el dinero juega un papel importante. Presumiblemente, estos modelos poseen indeterminación del equilibrio, aunque esta propiedad apenas haya recibido atención.

La propiedad más preocupante de los modelos de generaciones sucesivas es probablemente su potencialidad para la indeterminación del equilibrio, incluso si no existe dinero fiduciario. Existen dos razones para ello: en primer lugar, la indeterminación hace el modelo inadecuado para el análisis de estática comparativa. En segundo lugar hace problemático el concepto de previsión perfecta del futuro. La multiplicidad del equilibrio, de alguna forma, presenta dificultades para un economista interesado en usar el modelo para hacer análisis de estática comparativa del impacto de un cambio en los parámetros. Sin embargo, supongamos que el modelo posee un número finito de equilibrios localmente únicos que varían continuamente con los parámetros. (Casi todos los modelos estáticos de equilibrio general poseen estas propiedades.) Entonces el economista podría esperar que, apelando a la historia para justificar centrarse en un equilibrio particular y a un proceso de ajuste dinámico, usualmente no especificado, se puede justificar centrarse en el desplazamiento del equilibrio después de un cambio en el valor de los parámetros; es decir, que el análisis de estática comparativa aún tiene algún sentido. Esto desaparece si existe un continuo de equilibrios.

La idea sobre la que se fundamenta la previsión perfecta del futuro en un modelo determinista es que es la misma sobre la que se basa la hipótesis de expectativas racionales en un modelo con incertidumbre: los agentes conocen la estructura del modelo y la usan para predecir los valores relevantes de las variables futuras. Si el modelo no hace predicciones determinadas, la hipótesis de previsión perfecta del futuro se hace menos atractiva. Si existe un continuo de sendas con previsión perfecta del futuro, la teoría es incompleta.

Una forma de hacer la teoría completa sería fijar los valores de algunas variables en el primer período, por ejemplo, el volumen real de dinero o un precio relativo. Incluso este enfoque falla si $y(p_t, p_{t+1})$ no es siempre una función invertible en p_{t+1}. Cuando la curva de oferta se va hacia atrás, como en el gráfico 5, por ejemplo, puede existir un número infinito de equilibrios incluso si se fija el valor de $\hat{m}/\hat{p}_1$: en cualquier punto en que existen dos valores de $\hat{p}_{t+1}$ tales que $z(\hat{p}_{t-1}, \hat{p}_t) + y(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}) = 0$ podemos elegir la senda de precios a seguir. Puede existir ahora también un número incontable de equilibrios aislados, más bien que un continuo; la teoría es aún incompleta.

La modelación de las expectativas ha sido siempre un problema difícil en teoría económica. Keynes (1936), por ejemplo, era consciente de la importancia de la formación de expectativas, pero argumentó que trabajaba con un modelo en el cual el período de tiempo era lo suficientemente corto para que las expectativas pudieran ser consideradas exógenas. La forma más sencilla de hacer las expectativas endógenas es considerarlas adaptativas como, por ejemplo, Friedman (1968) y Phelps (1967). Los equilibrios de los modelos de generaciones sucesivas estarían determinados de forma genérica si especificamos las expectativas o bien de forma exógena o bien de forma adaptativa: puesto que los valores de las variables pasadas pueden ser tomadas como exógenas en cualquier período, las condiciones de equilibrio se reducen a un sistema con un número finito de ecuaciones con el mismo número de incógnitas. El cálculo de los equilibrios de dicho modelo se reduciría al cálculo de los equilibrios de una sucesión de modelos que parecen estáticos.

Geanakoplos y Polemarchakis (1986) han argumentado que la indeterminación deja espacio para factores como salarios nominales fijos y psicología del mercado. Como hemos visto en nuestra discusión del Teorema de la Equivalencia Ricardiana, si existe un continuo de equilibrios, algunos puede tener características keynesianas y otros no.

La indeterminación de equilibrio en los modelos de generaciones sucesivas es el factor más preocupante porque puede ser asociada con la existencia de profecías que se autorrealizan. Incluso aunque las preferencias, dotaciones y tecnología de una economía sean deterministas, una variable aleatoria puede afectar los equilibrios meramente porque los agentes lo esperan. Este fenómeno es denominado «manchas solares», aunque las manchas solares actuales de hecho pueden afectar una economía (véase, por ejemplo, Mirowski, 1984), y pueden no ser incluso estocásticas (véase, por ejemplo, Weiss, 1985). Existe una literatura amplia y creciente sobre manchas solares. Una lista muy incompleta de referencias es: Azariadis (1981), Azariadis y Guesnerie (1986), Cass y Shell (1983) y Farmer y Woodford (1984). Woodford (1986) presenta un ejemplo en que los agentes emplean una regla sencilla de aprendizaje y la economía converge al equilibrio de manchas solares de previsión perfecta del futuro.

Tan preocupante como la indeterminación del equilibrio es la posibilidad de que una economía no posea ningún equilibrio que converja a un estado estacionario. Si la senda seguida por los precios de equilibrio es caótica o periódica de amplitud muy larga, la hipótesis de previsión perfecta del futuro es poco atractiva por una razón bien diferente: requiere demasiada capacidad computacional en los agentes del modelo. Cualquier teoría de formación de expectativas que está designada para tratar el problema de la indeterminación del equilibrio debe también ser capaz de relajar el requisito de previsión perfecta del futuro cuando la dinámica de los precios de equilibrio sea caótica o periódica con amplitud elevada. Desafortunadamente, Benhabib y Nishimura (1985) y Boldrin y Montrucchio (1986) han demostrado, que incluso el modelo con un número finito de agentes de vida infinita puede poseer equilibrios caóticos o periódicos.

Nuestro análisis de modelos dinámicos de equilibrio general nos ha ofrecido un buen conocimiento sobre las razones de la existencia de ineficiencia en el sentido de Pareto y dinero fiduciario en el modelo de generaciones sucesivas, y de por qué no en el modelo con un número finito de consumidores de vida infinita. Nos ha dejado también claro de por qué estas propiedades se presentan en la versión truncada del modelo. Aunque hemos obtenido algún conocimiento sobre la posibilidad de la indeterminación del equilibrio, nos encontramos aún con el dilema de que la indeterminación es sintomática de cierta incompletitud en el modelo. Lo que es necesario es una teoría seria de formación de expectativas.

Referencias

AUERBACH, A. J.; KOTLIKOFF, L. J., y SKINNER, J., «The Efficiency Gains from Dynamic Tax Reform». *International Economic Review*, 24, pp. 81-100, 1983.
AZARIADIS, C., «Self-fulfilling Prophecies». *Journal of Economic Theory*, 25, pp. 380-396, 1981.
AZARIADIS, C. y GUESNERIE, R., «Sunspots and Cycles». *Review of Economic Studies*, 53, pp. 725-736 (1986).
BALASKO, Y.; CASS, D., y SHELL, K., «Existence of Competitive Equilibrium in a General Overlapping Generations Model». *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 307-322, 1980.
BALASKO, Y. y SHELL, K., «The Overlapping Generations Model I: The Case of Pure Exchange without Money». *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 281-306, 1980.
—— «The Overlapping Generations Model. III. The Case of Log-Linear Utility Functions». *Journal of Economic Theory*, 24, pp. 143-152, 1981.
BARRO, R., «Are Government Bonds Net Wealth?». *Journal of Political Economy*, 82, pp. 1095-1117, 1974.
BENHABIB, J. y DAY, R. H., «A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, pp. 37-55, 1982.
BENHABIB, J. y NISHIMURA, K., «Competitive Equilibrium Cycles». *Journal of Economic Theory*, 35, pp. 284-306, 1985.
BEWLEY, T., «The Optimum Quantity of Money», en J. Kareken y N. Wallace, editores, *Models of Monetary Economies*. Minneapolis: Federal Reserve Bank of Minneapolis, pp. 169-210, 1980.
— «An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory». *Journal of Mathematical Economics*, 10, pp. 233-267, 1982.
— «A Difficulty with the Optimum Quantity of Money». *Econometrica*, 51, pp. 1485-1504, 1983.
BOLDRIN, M. y MONTRUCCHIO, L., «On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths». *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 26-39, 1986.
BURKE, J. L., «Inactive Transfer Policies and Efficiency in General Overlapping Generations Economies». *Journal of Mathematical Economics*. de próxima aparición, 1986a.
— «On the Existence of Equilibria in Dynamic Production Economies», manuscrito inédito, 1986b.
— «On the Existence of Price Equilibria in Dynamic Economies». *Journal of Economic Theory*, de próxima aparición, 1986c.
CASS, D.; OKUNO, M., y ZILCHA, I., «The Role of Money in Supporting the Pareto Optimality of Competitive Equilibrium in Consumption Loan Type Models». *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 41-80, 1979.
CASS, D. y SHELL, K., «Do Sunspots Matter?». *Journal of Political Economy*, 91, pp. 193-227, 1983.
CASS, D. y YAARI, M., «A Re-examination of the Pure Consumption Loans Model». *Journal of Political Economy*, 74, pp. 353-367, 1966.
DEBREU, G., «Valuation Equilibrium and Pareto Optimum». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 40, pp. 588-592, 1954.
— «Economies with a Finite Set of Equilibria». *Econometrica*, 38, pp. 387-392, 1970.
DUTTA, J. y POLEMARCHAKIS, H. M., «Assets, Shocks, and Memory». First Boston Working Paper No. FB-85-27. Graduate School of Business, Columbia University, 1985.
FARMER, R. E. A. y WOODFORD, M., «Self-fulfilling Prophecies and the Business Cycle», manuscrito inédito, 1984.
FRIEDMAN, M., «The Role of Monetary Policy». *American Economic Review*, 58, pp. 1-17, 1968.
GALE, D., «Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models». *Journal of Economic Theory*, 6, pp. 12-36.
GEANAKOPLOS, J. D. y BROWN, D. J., «Comparative Statics and Local Determinacy in OLG Economies: An Application of the Multiplicative Ergodic Theorem». Cowies Foundation Discussion Paper No. 773, 1985.
GEANAKOPLOS, J. D.y POLEMARCHAKIS, H. M., «Intertemporally Separable, Overlapping Generations Models». *Journal of Economic Theory*, 34, pp. 207-215, 1984.
—— «Walrasian Indeterminacy and Keynesian Macroeconomics». *Review of Economic Studies*, 53, pp. 755-779, 1986.
GRANDMONT, J. M., «On Endogenous Competitive Business Cycles». *Econometrica*, 53, pp. 995-1043, 1985.
IRWIN, M. C., *Smooth Dynamical Systems*. New York: Academic Press, 1986.
KEHOE, T. J., «General Equilibrium Models with Infinite Numbers of Consumers and Goods». Manuscrito inédito, 1986.
KEHOE, T. J. y LEVINE, D. K., «Intertemporal Separability in Overlapping Generations Models». *Journal of Economic Theory*, 34, pp. 216-226, 1984a.
— «Regularity in Overlapping Generations Exchange Economies». *Journal of Mathematical Economics*, 13, pp. 69-93, 1984b.

— «Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Models». *Econometrica,* 53, pp. 433-453, 1985a.
— «Empirical Implications of Complete Contingent Claims», manuscrito inédito, 1985b.
— «An Example of Indeterminacy in an Overlapping Generations Model», manuscrito inédito, 1986.
KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K.; MAS-COLELL, A., y WOODFORD, M., «Gross Substitutability in Large-Square Economies», manuscrito inédito, 1986.
KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K.; MAS-COLELL, A., y ZAME, W. R., «Determinacy of Equilibrium in Large-Square Economies», manuscrito inédito, 1986.
KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K., y ROMER, P. M., «Smooth Valuation Functions and Determinacy in Economies with Infinitely Lived Consumers», manuscrito inédito, 1986.
KEYNES, J. M., *The General Theory of Employment, Interest, and Money.* New York: Harcourt, Brace, 1936.
KYDLAND, F. E. y PRESCOTT, E. C., «Time to Build and Aggregate Fluctuations». *Econometrica,* 50, 1345-1369, 1982.
LEVINE, D. K., «Infinite Horizon Equilibrium with Incomplete Markets», manuscrito inédito, 1986.
LUCAS, R. E, Jr., *Studies in Business Cycle Theory.* Oxford: Basil Blackwell, 1981.
MILLAN, T., «On the Existence of Optimal Competitive Equilibria in the Overlapping Generations Model», Ph. D. Dissertation, University of Minnesota.
MIROWSKI, P., «Macroeconomic Instability and the Natural Processes in Early Neoclassical Economics». *Journal of Economic History,* 64, pp. 345-354, 1984.
MULLER, W. J. III, y WOODFORD, M., «Determinacy of Equilibrium in Stationary Economies with Both Finite and Infinite Lived Consumers». *Journal of Economic Theory,* en prensa, 1985.
NEGISHI, T., «Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy». *Metroeconomica,* 12, pp. 92-97, 1960.
PHELPS, E. B., «Phillips Curves, Expectations of Inflation, and Optimal Unemployment over Time». *Economica,* 34, pp. 254-281, 1960.
RICARDO, D., «On the Principles of Political Economy», en P. Sraffa, editor. *The Works and Correspondence of David Ricardo.* Volume I. Cambridge: Cambridge University Press, 1951.
SAMUELSON, P. A., «An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money». *Journal of Political Economy,* 6, pp. 467-482, 1958.
SANTOS, M. S., y BONA, J. L., «On the Structure of the Equilibrium Price Set of Overlapping Generations Economies», manuscrito inédito, 1986.
SARGENT, T. J., *Dynamic Macroeconomic Theory,* manuscrito inédito, 1985.
SCHEINKMAN, J., y WEISS, L., «Borrowing Constraints and Aggregate Economic Activity». *Econnometrica,* 54, pp. 23-45, 1986.
SHAPLEY, L. B., y SHUBIK, M., «An Example of a Trading Economy with Three Competitive Equilibria». *Journal of Political Economy,* 85, pp. 873-875, 1977.
SHELL, K., «Notes on the Economics of Infinity». *Journal of Political Economy,* 79, pp. 1002-1011, 1971.
WEISS, N. O., «Chaotic Behavior in Stellar Dynamos». *Journal of Statistical Physics,* 39, pp. 477-491, 1985.
WILSON, C. A., «Equilibrium in Dynamic Models with an Infinity of Agents». *Journal of Economic Theory,* 24, pp. 95-111, 1981.
WOODFORD, M., «Expectations, Finance Constraints, and the Inestability of Investment». *Journal of Economic Theory,* 40, pp. 128-137, 1986.
— «Learning to Believe in Sunspots, manuscrito inédito, 1986.